

UNIVERSIDAD AUTONOMA DE MADRID
Departamento de Matemáticas

CONVERGENCIA ESFERICA DE INTEGRALES DE FOURIER:
NUEVAS ESTIMACIONES
PARA EL OPERADOR MULTIPLICADOR DEL DISCO

ELENA ROMERA COLMENAREJO



R.B.L. 57267

TESIS DOCTORAL DIRIGIDA POR
FERNANDO SORIA DE DIEGO

MADRID, SEPTIEMBRE 1991

SC/C/666

A Luis, mi compañero.

INDICE

PRESENTACION	1
 CAPITULO I. Introducción	 7
§1 Resultados anteriores	8
§2 Lemas generales	11
§3 Descomposición del operador T . Funciones de Bessel	18
§4 Algunos lemas sobre funciones de Bessel	25
 CAPITULO II. El Operador Maximal de Carleson sobre funciones radiales: Acotaciones extremales y estimaciones con peso	 36
§1 Acotaciones extremales	37
§2 Mayoración del operador maximal	39
§3 Prueba de las acotaciones extremales	44
§4 Acotaciones con peso del multiplicador del disco para funciones radiales	47
§5 Extensión de las acotaciones con pesos para polinomios armónicos	51

CAPITULO III. Pesos radiales y desigualdades en norma mixta para el multiplicador del disco54

§1 Teorema Principal	55
§2 Primeras consecuencias del Teorema	57
§3 Reducción y primera parte de la prueba	63
§4 Acotaciones derivadas de la primera parte de la prueba	67
§5 Segunda parte de la prueba	72

CAPITULO IV. Acotación vectorial del Multiplicador del Disco .. 80

§1 Introducción	81
§2 Demostración del Teorema 4.1	83
§3 Demostración del Teorema 4.2	87

CAPITULO V. Acotaciones vectoriales extremales del Multiplicador del Disco 93

§1 Estimaciones para sucesiones de funciones en l^2	94
§2 Demostración de las acotaciones extremales	96

BIBLIOGRAFIA 108

PRESENTACION

Esta memoria está dedicada al estudio del operador multiplicador del disco, T , que definimos a través de su Transformada de Fourier mediante la expresión:

$$(Tf)(\xi) = \chi_{B(0,1)}(\xi)\hat{f}(\xi)$$

donde $B(0,1)$ denota la bola de centro 0 y radio 1.

La importancia de este operador en el estudio de la convergencia de las series de Fourier ha hecho de él el centro de atención en los trabajos de investigación de grandes analistas de todos los tiempos.

El Análisis de Fourier surgió a principios del siglo pasado como una poderosa herramienta en la resolución de ecuaciones diferenciales. La idea central se basaba en aprovechar el buen comportamiento de la Transformada de Fourier sobre las derivadas de una función. Aplicándola a una ecuación concreta por medio de una simple manipulación algebraica nos permite conocer el espectro de lo que es la solución de dicha ecuación.

El problema es ahora recobrar una función a partir de su espectro, es decir, en el caso de una ecuación de ondas, cómo recobrar una onda (un sonido, por ejemplo) a partir de sus armónicos. Es decir, necesitamos saber cuándo la serie de Fourier (o la integral, para el caso de espectro continuo) converge a la función, en norma, uniformemente o puntualmente.

La teoría de espacios de Hilbert nos da una respuesta satisfactoria a la primera pregunta, mientras que la convergencia uniforme exige determinada regularidad a la función como es la pertenencia a los espacios de Sobolev. La convergencia puntual sigue siendo hoy por hoy una gran incógnita en el Análisis Armónico.

Fue Kolmogorov (véase [Z]) el primero en observar que existen funciones de L^1 cuya serie de Fourier diverge en casi todo punto. El contraejemplo, que luego se extendió a la divergencia en todo punto, proviene de modificar convenientemente una δ de Dirac.

En los años sucesivos se dió una curiosa paradoja en la Historia de las Matemáticas, al conjeturar dos grandes matemáticos de este siglo resultados opuestos sobre el mismo fenómeno. Por un lado, Lusin expresaba su convencimiento de que toda serie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$ converge puntualmente (en casi todo punto) siempre que $\sum_k |c_k|^2 < \infty$, es decir, siempre que la función sea de L^2 . Por otro lado, Zygmund no sólo pensaba que existían funciones de L^2 cuya serie de Fourier divergía en casi todo punto, sino que incluso el mejor resultado de convergencia parecía ser el obtenido por Kolmogorov, Seliverstov y Plessner a partir del criterio $\sum_{k \neq 0} |c_k|^2 \log |k| < \infty$. Fué L. Carleson quien en su famoso artículo de 1966 [Ca] dió la razón a Lusin.

En una dimensión, el multiplicador del disco viene dado "esencialmente" por la Transformada de Hilbert, H , que definimos mediante:

$$Hf(x) = p.v. \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)}{x-y} dy$$

y que como sabemos nos proporciona los valores frontera de la función armónica conjugada de f en el semiplano superior. El "esencialmente" quiere decir que omitimos cierta conjugación de H con funciones de módulo unidad. En concreto, el operador multiplicador S_R asociado a la bola $B(0, R)$ viene dado por la fórmula:

$$S_R f(x) = c(e^{iRx} H(fe^{-iRy})(x) - e^{-iRx} H(fe^{iRy})(x))$$

En particular, las propiedades de acotación de $T(= S_1)$ se siguen de las propiedades de acotación de H . El Teorema de Carleson establece al respecto que el operador maximal

$$\sup_{R \in \mathbb{R}} |H(f(*)e^{iRy})(x)| = \sup_{R \in \mathbb{R}} |p.v. \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{f(y)e^{iRy}}{x-y} dy|$$

está acotado en $L^2(\mathbb{R})$. Posteriormente, R. Hunt [Hu] extendió este resultado a $L^p(\mathbb{R})$, con $1 < p < \infty$.

El análogo en n variables de la descomposición descrita para el operador T se consigue a partir de la expansión en armónicos esféricos de una función, de la forma:

$$f(x) \sim \sum_k f_k(|x|) \mathcal{Y}_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

donde cada armónico esférico, \mathcal{Y}_k es la restricción a la esfera unidad de un polinomio armónico homogéneo en \mathbb{R}^n . La expresión de Tf viene dada por:

$$Tf(x) \sim \sum_k F_k(|x|) \mathcal{Y}_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

en donde cada F_k representa de nuevo una conjugación de la transformada de Hilbert, esta vez con el peso $|x|^{\frac{n-1}{2}}$ y modificada a su vez con el producto de funciones de Bessel, que actúa sobre f_k , la proyección de la función f sobre el armónico esférico \mathcal{Y}_k (véase el capítulo I).

Para probar la acotación del operador maximal $T^* = \sup_R |S_R|$ en dimensiones $n > 1$ (y por tanto también la convergencia puntual) hacía falta conocer primero en qué espacios $L^p(\mathbb{R}^n)$ estaba acotado cada uno de los operadores S_R . Una buena forma de aproximarse al problema es comenzar considerando funciones radiales.

Esto es lo que hizo C. Herz en 1956 [H] quien probó que el multiplicador del disco está acotado cuando actúa sobre las funciones radiales de $L^p(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$. Parecía entonces natural pensar que tanto T como T^* estarían acotados en esos mismos espacios para idéntico rango de p , y en particular se cumpliría entonces que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R f(x) = f(x) \quad \text{c.t.x.}$$

para toda función $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ con $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$.

Sin embargo, en 1971, en otro de los grandes pasos del análisis, C. Fefferman [F1] probó que el único espacio $L^p(\mathbb{R}^n)$ donde el multiplicador del disco, T , está acotado es el de $p = 2$, si $n \geq 2$. La acotación del operador maximal T^* en $L^2(\mathbb{R}^n)$ (y por tanto la convergencia esférica en casi todo punto para funciones de L^2) permanece hasta la fecha abierto.

En el conocido congreso de Análisis Armónico de Williamstown en 1978, E. Stein propuso el problema de caracterizar el operador maximal que asociase a cada peso, w , otro W de forma que se cumpla la desigualdad de L^2 :

$$(1) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^2 w \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 W$$

siempre que $f \in L^2(Wdx)$ con constante independiente de f .

La Teoría de Pesos, desarrollada a lo largo de las décadas de los setenta y ochenta tiene como objeto ganar información sobre el comportamiento respecto a medidas no isotrópicas de un determinado operador. Así, el estudio de las propiedades de acotación de éste pueden entonces deducirse del correspondiente estudio de la aplicación $w \rightarrow W$. Esto es particularmente interesante en el caso de un operador altamente oscilatorio como es el operador T .

Uno de los resultados más conocidos sobre desigualdades con pesos para el multiplicador del disco es debido a Hirschman, [Hi], quien probó que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^2 \frac{dx}{|x|^\gamma} \leq C_\gamma \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \frac{dx}{|x|^\gamma}$$

con cierta constante C_γ independiente de f , para los valores $-1 < \gamma < 1$. Esto es el ejemplo típico de desigualdades con pesos para el multiplicador del disco.

Motivado por los trabajos de C. Fefferman [F2] y A. Córdoba [C1] en los que se relaciona el comportamiento de los multiplicadores de Bochner-Riesz, $T^\lambda f(\xi) = (1 - |\xi|)_+^\lambda \hat{f}(\xi)$, con el operador maximal de Keakeya de una cierta excentricidad, E. Stein propuso investigar si la relación $w \rightarrow W$ en el caso del multiplicador del disco vendría dada por el operador maximal en todas las direcciones. Esto es el límite de los operadores maximales de Keakeya cuando la excentricidad se hace arbitraria, al igual que T es el límite de los operadores de Bochner-Riesz cuando el índice λ tiende a cero. El estudio de este problema ha sido una de las principales motivaciones del presente trabajo.

La memoria se divide en cinco capítulos. En el primero, de carácter técnico, se establecen las estimaciones sobre las funciones de Bessel que son necesarias para el estudio posterior. Son estimaciones en dos líneas diferentes. Las estimaciones que harán falta en los capítulos III, IV y V no tienen en cuenta el carácter oscilatorio de las funciones de Bessel, J_k , centrándose en el estudio de la región "próxima" al índice k . Las que se utilizarán en el capítulo II, donde se analiza la convergencia esférica de integrales de Fourier de funciones radiales así como de combinaciones de funciones radiales y polinomios armónicos, requieren el estudio de la oscilación para valores grandes de la variable.

En este capítulo II probaremos las acotaciones de tipo débil restringido del operador maximal T^* cuando actúa sobre las funciones radiales de los espacios L^p de exponentes extremos: $p_0 = \frac{2n}{n+1}$ y $p_1 = \frac{2n}{n-1}$ (Teorema 2.1). Ya previamente C. Kenig y P. Tomas [KT] habían probado que T no es de tipo débil para $p = \frac{2n}{n+1}$, mientras que S. Chanillo [Ch] había obtenido un resultado positivo al probar la acotación de tipo débil restringido del operador T cuando actúa sobre las funciones radiales de L^p para $p = \frac{2n}{n+1}$. El Corolario 2.2 obtenido por interpolación es un resultado ya obtenido anteriormente por E. Prestini [P] e independientemente por Y. Kanjin K.

Las técnicas empleadas para probar el Teorema 2.1 permiten probar desigualdades con pesos para T^* cuando actúa sobre funciones radiales de L^p para exponentes $1 < p < \infty$ (Teorema 2.7). Estas desigualdades con pesos son también válidas para funciones producto de una radial y un polinomio armónico homogéneo (Teorema 2.8). Las condiciones exigidas a los pesos son similares (pero más sencillas) que las obtenidas por K. Andersen [A] y permiten extender el resultado a sumas de productos de funciones radiales y polinomios armónicos homogéneos.

En el capítulo III daremos una respuesta positiva al problema de Stein para el caso de pesos radiales (Teorema 3.1). De forma sencilla obtendremos resultados del tipo de la desigualdad (1) para operadores que representan modificaciones del operador de Hardy-Littlewood (Corolarios 3.9 y 3.10). Es sin embargo bastante más difícil de obtener la desigualdad para el operador en todas las direcciones. Unas y otras estimaciones son suficientes como veremos para recobrar un resultado reciente debido, de forma independiente a A. Córdoba [C2] y G. Mockenhaupt [Mo] sobre la acotación en norma mixta $L^p_{rad}L^2_{ang}(\mathbb{R}^n)$ del operador T , con $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$.

Debido al desarrollo en armónicos esféricos tanto de una función f como de Tf que mencionamos anteriormente podemos interpretar T como un operador con valores vectoriales. Con la misma notación que hemos empleado antes, podemos pensar a T como el operador que asocia a $\{f_k\}_k$ la nueva sucesión $\{F_k\}_k$. Las acotaciones del capítulo III (Corolario 3.8) nos dicen que este operador está entonces acotado en el espacio $L^p_{l_2}$. Podemos preguntarnos ahora sobre el comportamiento en $L^p_{l_q}$ para valores $q \neq 2$. A esto se dedica el capítulo IV, en el que probamos estimaciones en el espacio $L^p_{l_q}(r^{n-1}dr)$ para $\frac{2n}{n+1} < p, q < \frac{2n}{n-1}$ (Teorema 4.2). Esta acotación es del estilo de las desigualdades de Fefferman-Stein [FS] sobre la acotación vectorial del operador de Hardy-Littlewood. Un resultado previo, (Teorema 4.1), establece una acotación en $L^p_{l_q}(dr)$, $4/3 < p, q < 4$ del operador obtenido al eliminar la conjugación por la función $|x|^{\frac{n-1}{2}}$. En todos los casos se prueba a través de desigualdades maximales con pesos.

El capítulo V se dedica a demostrar acotaciones vectoriales extremales del operador T , interpretado tal como hemos hecho en el capítulo IV. Se trata del Teorema 5.1, en donde se prueba la acotación entre los espacios $L^{p,1}_{l_2}(\mathbb{R}_+, r^{n-1}dr)$ y $L^{p,\infty}_{l_2}(\mathbb{R}_+, r^{n-1}dr)$, con $p = \frac{2n}{n+1}$ ó $p = \frac{2n}{n-1}$, $n \geq 2$. Este resultado admite una interpretación en términos de acotaciones extremales en norma mixta.

La motivación principal y constante para este trabajo está en los artículos de J. L. Rubio de Francia [R], A. Córdoba [C2], G. Mockenhaupt [Mo], J. A. Barceló y A. Córdoba [BC1] y [BC2], A. Carbery, E. Hernández y F. Soria [CHS], A.

Carbery y F. Soria [CSo] así como en la tesis doctoral de J. A. Barceló [B], como observamos, todos los autores a excepción de G. Mockenhaupt son de este mismo Departamento o han estado muy ligados a él. Todos estos trabajos, publicados o llevados a cabo durante mi estancia en esta universidad han proporcionado un entorno muy propicio para la realización de mi trabajo, en un lugar en el que se ha reunido un excelente grupo de analistas muy activos.

A todos ellos y a los demás miembros de este Departamento agradezco su acogida durante estos años. En especial mencionaré a mis compañeros (y sobre todo amigos) Arturo y Jesús con quienes he compartido tantas cosas. Y por último, pero no en último lugar, agradezco de todo corazón a Fernando Soria toda la ayuda, el apoyo y el tiempo que me ha dedicado a lo largo de estos años que he estado trabajando bajo su dirección. Son sin duda su gran interés y la paciencia que ha derrochado conmigo quienes se merecen el mérito de este trabajo.

CAPITULO I
INTRODUCCION

§1 Resultados anteriores	8
§2 Lemas generales	11
§3 Descomposición del operador T . Funciones de Bessel	18
§4 Algunos lemas sobre funciones de Bessel	25

CAPITULO I

INTRODUCCION

§1 RESULTADOS ANTERIORES

Para simplificar las expresiones que manejaremos en esta memoria, tomamos como transformada de Fourier de una función f suficientemente regular la expresión:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

que es una dilatación de la Transformada de Fourier habitual, \tilde{f} :

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \tilde{f}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right)$$

Si definimos la antitransformada de Fourier mediante:

$$\check{g}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} g(\xi) d\xi$$

Entonces se tiene (para funciones suficientemente regulares):

$$\begin{aligned} (\hat{f})(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\xi} \tilde{f}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \tau} \tilde{f}(\tau) (2\pi)^n d\tau = f(x) \end{aligned}$$

Asimismo, la identidad de Plancherel queda:

$$\langle f, g \rangle = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle$$

donde $\langle *, * \rangle$ denota el producto interior en $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Como referencia para esta definición de Transformada de Fourier se puede consultar el libro de N. Wiener [Wi].

El principal objeto de estudio de esta memoria será el Operador Multiplicador del Disco. Este operador se define por medio de su transformada de Fourier mediante la formula:

$$(Tf)^\wedge(\xi) = \chi_{B(0,1)}(\xi) \hat{f}(\xi)$$

donde $B(0,1)$ es la bola de centro 0 y radio 1 y el símbolo $^\wedge$ denota la Transformada de Fourier. El multiplicador del disco es el operador central en la Teoría de Convergencia Esférica de integrales de Fourier.

Cuando la dimensión del espacio es 1, este operador viene dado por algo tan sencillo como la conjugación de la Transformada de Hilbert con la función acotada e^{ix} :

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iy\xi} f(y) dy e^{i\xi x} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi(x-y)} f(y) dy d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-1}^1 e^{i\xi(x-y)} d\xi dy \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} [e^{i\xi(x-y)}]_{-1}^1 dy = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(y)}{x-y} (e^{i(x-y)} - e^{-i(x-y)}) dy \\ &= c(e^{ix} H(f(y)e^{-iy})(x) - e^{-ix} H(f(y)e^{iy})(x)) \end{aligned}$$

Sus propiedades de acotación van a ser entonces semejantes a las de H , por lo que en el estudio del operador T solamente consideraremos dimensiones $n \geq 2$.

Los resultados previos más importantes sobre este operador están incluidos en el Teorema 1.1.

TEOREMA 1.1.

(1) (Herz, [H])

T está acotado en $L^p_{rad}(\mathbf{R}^n) \equiv L^p(\mathbf{R}^n) \cap \{\text{funciones radiales de } \mathbf{R}^n\}$ si y sólo si $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$.

(2) (C. Fefferman, [F1])

T está acotado en $L^p(\mathbf{R}^n)$ si y sólo si $p = 2$ cuando $n \geq 2$

(3) (C. Kenig y P. Tomas, [KT])

T no es de tipo débil para $p = \frac{2n}{n+1}$.

(4) (S. Chanillo, [Ch])

T es de tipo débil restringido sobre $L^p_{rad}(\mathbf{R}^n)$ para $p = \frac{2n}{n+1}$, y por dualidad, para $p = \frac{2n}{n-1}$.

Recordemos aquí lo que entendemos por operador de tipo débil p restringido. En primer lugar es un operador que lleva el espacio $L^{p,1}$ en $L^{p,\infty}$ y esto es equivalente a decir que cumple la desigualdad de tipo débil p (es decir, acotación entre los espacios L^p y $L^{p,\infty}$) cuando lo restringimos a funciones características de conjuntos de medida finita. Véase el libro de E.M. Stein y W. Weiss [SW] para referencia sobre este tipo de acotaciones.

El resultado de Herz [H] que hemos incluido en el apartado 1 de este teorema hizo pensar que el operador T estaría acotado en los espacios $L^p(\mathbf{R}^n)$ cuando p está dentro de los límites críticos, es decir: $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$, pero sin necesidad de restringirse a las funciones radiales de dichos espacios.

Este planteamiento resultó ser falso, según probó C. Fefferman en el famoso artículo [F1] donde se prueba el apartado 2 del teorema. Con ese resultado quedaba cerrado el problema de la acotación de T sobre los espacios de funciones $L^p(\mathbf{R}^n)$.

C. Kenig y P. Tomas con su artículo [KT] avanzaron un poco más probando que este operador tampoco es de tipo débil para el exponente $p = \frac{2n}{n+1}$.

Restringiendo la búsqueda de acotaciones del operador T a espacios de funciones más pequeños, como por ejemplo $L^p_{rad}(\mathbf{R}^n)$ se han seguido obteniendo resultados positivos. El siguiente paso positivo lo dió S. Chanillo [Ch] extendiendo la acotación de Herz con una acotación de tipo débil restringido sobre el espacio $L^p_{rad}(\mathbf{R}^n)$ para $p = \frac{2n}{n+1}$. Este es el apartado 4 del teorema.

Enlazando directamente con estos resultados está el Teorema 2.1, que es el principal objetivo del capítulo II de esta memoria, en que se prueba acotación entre los espacios $L^{p_i,1}_{rad}(\mathbf{R}^n)$ y $L^{p_i,\infty}_{rad}(\mathbf{R}^n)$, $i = 0, 1$, donde $p_0 = \frac{2n}{n+1}$ y $p_1 = \frac{2n}{n-1}$ para el operador maximal sobre medias esféricas de Fourier. En particular, obtenemos como consecuencia resultados de convergencia en estos espacios.

§2 LEMAS GENERALES

Se incluyen en esta sección un par de lemas de carácter muy general de los que haremos uso a lo largo de esta memoria. El primero de ellos es una acotación con peso en L^p de sobra conocida, y se aplica a varios operadores que aparecerán más adelante. Estos son el operador maximal de Hardy-Littlewood, M ; la Transformada de Hilbert, H ; la Transformada maximal de Hilbert, H^* ; el operador de Hardy, H_a ; el traspuesto del operador de Hardy, H_a^t y el operador de Carleson, \tilde{C} ; definidos respectivamente por:

$$Mf(x) = \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$Hg(x) = v.p. \int_{\varepsilon < |y| < N} \frac{g(x-y)}{y} dy, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$H^*g(x) = \sup_{N > \varepsilon > 0} \left| \int_{\varepsilon < |y| < N} \frac{g(x-y)}{y} dy \right|, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$H_a f(x) = \frac{1}{|x|^n} \int_{B(0, |x|)} f(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$H_a^t f(x) = \int_{B(0, |x|)^c} f(y) \frac{dy}{|y|^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$$\tilde{C}g(x) = \sup_{0 < \varepsilon < r, n \in \mathbb{R}} \left| \int_{\varepsilon \leq |x-t| < r} \frac{e^{-iny} g(y)}{x-y} dt \right|, \quad x \in \mathbb{R}$$

donde Q denota un cubo en \mathbb{R}^n y $B(z, r)$ la bola de centro z y radio r . Obsérvese que $|H_a f| \leq C_n Mf$.

El operador de Hardy en una variable se puede definir para funciones f en la semirrecta $(0, \infty)$ como

$$\frac{1}{x} \int_0^x f(y) dy$$

Nuestra definición envuelve una cierta simetrización respecto del origen que no afecta a sus propiedades de acotación, lo mismo ocurre con su traspuesto.

Quizás uno de los aspectos más importantes de los últimos años en Análisis Armónico haya sido caracterizar las medidas no isotrópicas en \mathbb{R}^n respecto a las cuales los operadores clásicos estaban acotados en los correspondientes espacios L^p . Esto ha dado lugar a lo que se conoce como Teoría de Pesos.

En las acotaciones con pesos que vamos a presentar nos referiremos con frecuencia a las clases de pesos de Muckenhoupt, A_p , $1 \leq p < \infty$, que podemos definir como sigue:

$$A_1 = A_1(\mathbf{R}^n) = \{(u, v) : u, v > 0, Mu(x) \leq Cv(x), \text{ c.t. } x \in \mathbf{R}^n\}$$

y para $1 < p < \infty$:

$$A_p = A_p(\mathbf{R}^n) = \{(u, v) : u, v > 0, (\frac{1}{|Q|} \int_Q u)(\frac{1}{|Q|} \int_Q v^{\frac{-1}{p-1}})^{p-1} \leq C, \forall \text{ cubo } Q\}$$

Diremos que un peso w está en la clase A_p cuando el par (w, w) esté en la clase A_p . Una referencia obligada para el estudio de las propiedades de esta clase de pesos es el libro de J. García-Cuerva y J.L. Rubio de Francia [GR].

Muckenhoupt fue el primero en observar que $w \in A_p$ si y sólo si el operador de Hardy-Littlewood es de tipo fuerte en L^p respecto a ese peso.

Se sabe que para M , H y para todos los operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund se tienen las siguientes acotaciones:

$$\begin{aligned} T : L^p(w) &\longrightarrow L^p(w) & 1 < p < \infty, \forall w \in A_p \\ T : L^1(w) &\longrightarrow L^{1,\infty}(w) & \forall w \in A_1 \end{aligned}$$

que probaron Muckenhoupt (ver [Mu]) y Coifman y Fefferman (ver [CF]).

También sabemos que el operador de Carleson, \tilde{C} , está acotado:

$$\tilde{C} : L^p(w) \longrightarrow L^p(w) \quad \forall w \in A_p, 1 < p < \infty$$

fueron Hunt y Young [HY] quienes dieron una demostración. Para este operador no se cumple sin embargo una acotación de tipo débil (1,1).

Para posterior referencia enunciamos los resultados que necesitamos en forma de lema:

LEMA 1.2.

Para todo $p \in (1, \infty)$ y para todo peso $w \in A_p$ se cumple la acotación

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Tg(t)|^p w(t) dt \leq C_p \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^p w(t) dt$$

donde T es cualquiera de los operadores M , H , H^* , H_a , H_a^* ó \tilde{C} .

Las únicas desigualdades del tipo anterior que nos interesarán en el capítulo II son las de pesos potencia $w(x) = |x|^\alpha$.

En general, si tenemos un operador integral T acotado de $L^p(\mathbf{R}^n)$ en $L^p(\mathbf{R}^n)$ (sin peso) que viene dado por un núcleo que cumple:

$$|K(x, y)| \leq \frac{c}{|x - y|^n}$$

entonces T está acotado de $L^p(w)$ en $L^p(w)$ para todo peso de la forma $w(x) = |x|^\alpha$ que esté en la clase A_p , es decir, $-n < \alpha < (p - 1)n$.

Para $1 < p < \infty$ esto es un resultado de Stein, [S3]. En el exponente $p = 1$, S. Hofmann [Ho] ha probado que se tiene una estimación de tipo débil para potencias $-n < \alpha \leq 0$, tomando como hipótesis adicionales la acotación en $L^2(\mathbf{R}^n)$ del operador T y condiciones de tipo Hörmander.

Vamos a dar una demostración sencilla (y distinta) de este resultado válida para pesos algo más generales e incluso para operadores maximales. Se debe a F. Soria y G. Weiss. Obsérvese que todos los operadores citados anteriormente cumplen las condiciones que requerimos en el enunciado.

LEMA 1.3.

Sea el operador $T^* = \sup_j |T_j|$, donde cada T_j es un operador integral dado por cierto núcleo K_j que cumple:

$$|K_j(x, y)| \leq \frac{c}{|x - y|^n}$$

con constante c independiente de j . Si para algún p , $1 < p < \infty$ se tiene la acotación $T^* : L^p(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^p(\mathbf{R}^n)$ o T^* está acotado entre los espacios $L^p(\mathbf{R}^n)$ y $L^{p,\infty}(\mathbf{R}^n)$ con $1 \leq p < \infty$ entonces:

$$T^* : L^p(w) \longrightarrow L^p(w) \quad 1 < p < \infty$$

o respectivamente

$$T^* : L^p(w) \longrightarrow L^{p,\infty}(w) \quad 1 \leq p < \infty$$

para todo peso $w \in A_p$ tal que

$$\sup_{2^{k-2} \leq |x| \leq 2^{k+1}} w \leq C \inf_{2^{k-2} \leq |x| \leq 2^{k+1}} w := Cc_k$$

PRUEBA:

Consideramos las coronas $I_k = \{x : 2^{k-1} \leq |x| < 2^k\}$ y sus dilatadas $I_k^* = \{x : 2^{k-2} \leq |x| \leq 2^{k+1}\}$ y para cada función f separamos los trozos siguientes:

$$f = f\chi_{I_k^*} + f\chi_{(I_k^*)^c} = f_1^k + f_2^k$$

Por otra parte, es claro que $\sum_k \chi_{I_k} = 1$ luego podemos separar también:

$$\begin{aligned} T^*f(x) &= \sum_k T^*f(x)\chi_{I_k}(x) = \sum_k T^*(f_1^k + f_2^k)(x)\chi_{I_k}(x) \\ &\leq \sum_k T^*f_1^k(x)\chi_{I_k}(x) + \sum_k T^*f_2^k(x)\chi_{I_k}(x) = \\ &= T_1^*f(x) + T_2^*f(x) \end{aligned}$$

Calculamos ahora la norma en $L^p(w)$, $p > 1$, de cada uno de estos dos operadores. Comenzamos con T_1^* . Como los I_k son coronas disjuntas podemos meter la potencia dentro de la suma:

$$\begin{aligned} &\int \left| \sum_k T^*f_1^k(x)\chi_{I_k}(x) \right|^p w(x) dx \\ &= \int \sum_k |T^*f_1^k(x)|^p \chi_{I_k}(x) w(x) dx \\ &= \sum_k \int_{I_k} |T^*f_1^k(x)|^p w(x) dx \end{aligned}$$

Dentro de cada I_k , $w(x)$ es como una constante, por hipótesis. Utilizando además que T^* está acotado en L^p mayoramos lo anterior por

$$\begin{aligned} &\leq c \sum_k c_k \int_{I_k} |T^*f_1^k(x)|^p dx \\ &\leq c \sum_k c_k \int_{\mathbb{R}^n} |T^*f_1^k(x)|^p dx \\ &\leq c \sum_k c_k \int_{\mathbb{R}^n} |f_1^k(x)|^p dx \\ &= c \sum_k c_k \int_{I_k^*} |f(x)|^p dx \end{aligned}$$

Por último, observamos que dentro de I_k^* el peso w es como c_k , y que el solapamiento de las coronas I_k^* es a lo sumo de tres, esto nos lleva a mayorar por:

$$\begin{aligned} &\leq c \sum_k \int_{I_k^*} |f(x)|^p w(x) dx \\ &\leq 3c \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p w(x) dx = c \|f\|_{L^p(w)}^p \end{aligned}$$

Esto termina la acotación para T_1^* , para T_2^* utilizamos la acotación uniforme de cada núcleo K_j .

$$\sum_k T^* f_2^k(x) \chi_{I_k}(x) \leq c \sum_k \int \frac{|f_2^k(y)|}{|x-y|^n} dy \chi_{I_k}(x)$$

Observamos ahora que $|x-y|^n \geq ||x|-|y||^n$ y para que los integrandos sean no nulos debe cumplirse $x \in I_k$ e $y \in (I_k^*)^c$. Por lo tanto, podemos acotar esto último:

$$|x-y|^n \geq ||x|-|y||^n \geq c(|x|^n + |y|^n)$$

Con ello, la estimación de T_2^* se acota por:

$$\begin{aligned} &\leq C \sum_k \int \frac{|f_2^k|}{|x|^n + |y|^n} dy \chi_{I_k}(x) \\ &\leq C \int \frac{|f(y)|}{|x|^n + |y|^n} dy \end{aligned}$$

Ahora podemos mayorar por la suma del operador de Hardy y el traspuesto de ese mismo operador, H_a^t :

$$T_2^* f(x) \leq C(H_a |f(x)| + H_a^t |f(x)|)$$

Tanto H_a como H_a^t son operadores acotados en $L^p(w)$ si w es un peso de A_p . Esto termina la prueba:

$$\int (T_2^* f)^p(x) w(x) dx \leq C \int |f(x)|^p w(x) dx = C \|f\|_{L^p(w)}^p$$

Para la acotación de tipo débil utilizamos la misma descomposición del operador T^* . Escribiremos solamente la prueba para $p = 1$.

Para la estimación correspondiente a T_1^* calculamos:

$$\begin{aligned} & \int_{\{x: |T_1^* f(x)| > \lambda\}} w(x) dx \\ & \leq \int_{\{x: \sum_k |T^* f_1^k(x)| \chi_{I_k}(x) > \lambda\}} w(x) dx \end{aligned}$$

Recordando que los I_k no se cortan separamos el conjunto de integración en una unión disjunta.

$$\begin{aligned} & = \int_{\cup_k \{x \in I_k: |T^* f_1^k(x)| > \lambda\}} w(x) dx \\ & = \sum_k \int_{\{x \in I_k: |T^* f_1^k(x)| > \lambda\}} w(x) dx \end{aligned}$$

Puesto que el peso w es esencialmente constante en I_k , se tiene:

$$\begin{aligned} & \leq c \sum_k c_k \int_{\{x \in I_k: |T^* f_1^k(x)| > \lambda\}} dx \\ & \leq c \sum_k c_k \int_{\{x: |T^* f_1^k(x)| > \lambda\}} dx \\ & \leq c \sum_k c_k \frac{1}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f_1^k(x)| dx \end{aligned}$$

En donde hemos utilizado en la última desigualdad la hipótesis del Lema para $p = 1$. Al ser el soporte de f_1^k el intervalo I_k^* podemos volver a poner el peso dentro de la integral:

$$\begin{aligned} & \leq \frac{c}{\lambda} \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} |f_1^k(x)| w(x) dx \\ & = \frac{c}{\lambda} \sum_k \int_{I_k^*} |f(x)| w(x) dx \\ & \leq \frac{3c}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| w(x) dx \end{aligned}$$

En cuanto a T_2^* , habíamos llegado a que:

$$T_2^* f(x) \leq c |H_a f(x) + H_a^t f(x)|$$

Siendo cada uno de estos dos operadores que intervienen de tipo débil (1,1) con respecto a cada peso $w \in A_1$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\{x: |T_2^* f(x)| > \lambda\}} w(x) dx &\leq \int_{\{x: |H_a f(x) + H_a^t f(x)| > \frac{\lambda}{c}\}} w(x) dx \\ &\leq \frac{c}{\lambda} \int |f(x)| w(x) dx \end{aligned}$$

Esto termina la prueba. ■

§3 DESCOMPOSICION DEL OPERADOR T . FUNCIONES DE BESSEL

La estrategia fundamental y el punto de partida de las acotaciones presentadas en esta memoria es una adecuada descomposición del operador multiplicador del disco, T . Esa descomposición va a ser en términos de operadores cada uno de los cuales envuelve las Funciones de Bessel, que aparecen de forma natural en la expresión de T . Para una referencia sobre las funciones de Bessel pueden consultarse los libros de Watson [W] y de Stein y Weiss [SW].

Las Funciones de Bessel son las soluciones de la Ecuación de Bessel:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - k^2)y(x) = 0$$

La solución de la ecuación correspondiente a la constante k es la función de Bessel de orden k , que se denota por $J_k(x)$. La siguiente fórmula define las Funciones de Bessel para índices k enteros:

$$J_k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{itsen\theta} e^{-ik\theta} d\theta$$

Para definir las funciones de Bessel de índices no enteros necesitamos otra expresión, que nos proporciona la Representación de Poisson de las Funciones de Bessel:

$$J_k(t) = \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^k}{\Gamma(k + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 e^{its} (1 - s^2)^{k-\frac{1}{2}} ds$$

Esta fórmula es válida para los números reales $k > -\frac{1}{2}$ y $t > 0$.

Las funciones de Bessel cumplen una serie de sencillas fórmulas de recurrencia que escribimos a continuación. Todas ellas pueden encontrarse en Watson ([W] pag. 45).

- (1) $J_k(t) = \frac{t}{2k}(J_{k-1}(t) + J_{k+1}(t))$
- (2) $J'_k(t) = \frac{1}{2}(J_{k-1}(t) - J_{k+1}(t))$
- (3) $(t^k J_k(t))' = t^k J_{k-1}(t)$
- (4) $(t^{-k} J_k(t))' = -t^{-k} J_{k+1}(t)$

La descomposición buscada del operador T se basa a su vez en una descomposición del espacio L^2 en subespacios invariantes por la transformada de Fourier.

Empecemos por el caso $n = 2$. Dada una función $f \in L^2(\mathbf{R}^2)$ podemos considerar su expansión en serie de Fourier:

$$f(re^{i\theta}) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_k(r) e^{ik\theta}$$

para ciertas funciones (coeficientes) f_k definidas en $(0, \infty)$. En realidad lo que tenemos es una descomposición del espacio $L^2(\mathbf{R}^2)$ como suma directa:

$$L^2(\mathbf{R}^2) = \sum_{-\infty}^{\infty} \oplus \mathbb{N}^k$$

donde los espacios \mathbb{N}^k son cerrados en $L^2(\mathbf{R}^2)$, son mutuamente ortogonales y el cierre de sus combinaciones lineales es todo $L^2(\mathbf{R}^2)$, y se definen:

$$\mathbb{N}^k = \{g \in L^2(\mathbf{R}^2) : g(z) = f(r) e^{ik\theta}, z = re^{i\theta},$$

siendo f medible y con $\int_0^{\infty} |f(r)|^2 r dr < \infty\}$

La principal ventaja de esta descomposición es que los espacios \mathbb{N}^k son invariantes por la transformada de Fourier. Con ella podemos calcular transformadas y antitransformadas de forma directa.

Para el caso $n > 2$ necesitamos la extensión de esta descomposición al espacio $L^2(\mathbf{R}^n)$, que viene dada en términos de los armónicos esféricos.

Similarmente a la situación en $L^2(\mathbf{R}^2)$ el espacio $L^2(\mathbf{R}^n)$ se puede descomponer como una suma directa:

$$L^2(\mathbf{R}^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \oplus \mathbb{N}_k$$

donde \mathbb{N}_k es el espacio de todas las combinaciones lineales finitas de funciones de la forma $f(r)P(x)$, siendo f una función radial y P un polinomio armónico homogéneo de grado k tal que $f(r)P(x) \in L^2(\mathbf{R}^n)$.

Siendo $P(x)$ homogéneo de grado k lo podemos escribir como $P(x) = |x|^k P(\frac{x}{|x|})$ y englobar la potencia de $|x|$, que es radial, dentro de la función $f(r)$.

Así, una función $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ se puede expresar:

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} F_k(x)$$

donde

$$F_k(x) = \sum_{j=1}^{a_k} f_{k,j}(|x|) P_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

para ciertos polinomios armónicos $P_j^{(k)}$ homogéneos de grado k , y hemos denotado por a_k la dimensión de \mathbb{N}_k .

Por armónico esférico de grado k entendemos la restricción a la esfera Σ_{n-1} de un polinomio armónico homogéneo de grado k . Podemos elegir una base ortonormal de armónicos esféricos, $\{\mathcal{Y}_j^{(k)}\}_{\substack{k \geq 0 \\ 1 \leq j \leq a_k}}$ y en función de esta base una función f se expresará:

$$f(x) \sim \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 1 \leq j \leq a_k}} f_{k,j}(|x|) \mathcal{Y}_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

Los espacios \mathbb{N}_k son cerrados, mutuamente ortogonales y cada elemento de $L^2(\mathbf{R}^n)$ es un límite de combinaciones lineales finitas de elementos de \mathbb{N}_k . Además, y ésto es fundamental para nuestro estudio, cada espacio \mathbb{N}_k es invariante por la transformada de Fourier.

Esta propiedad nos va a permitir calcular una expresión para la Transformada de Fourier de una función $f \in L^2(\mathbf{R}^n) \cap L^1(\mathbf{R}^n)$.

El resultado que se prueba en el libro de Stein y Weiss [SW] p.158 es que la transformada de Fourier (habitual) de una función de la forma $f(x) = g(|x|)P_k(x)$ donde $P_k(x)$ es un polinomio armónico homogéneo de grado k tiene la forma:

$$\tilde{f}(\xi) = G(|\xi|)P_k(\xi)$$

donde:

$$G(|\xi|) = \frac{2\pi i^{-k}}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}+k}} \int_0^{\infty} g(t) J_{\frac{n-2}{2}+k}(2\pi|\xi|t) t^{\frac{n}{2}+k} dt$$

Entonces, para la transformada de Fourier que vamos a utilizar, \hat{f} , se tendrá:

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-n/2} \tilde{f}\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) = G\left(\frac{|\xi|}{2\pi}\right) P_k\left(\frac{\xi}{2\pi}\right) \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}+k} i^{-k}}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}+k}} \int_0^\infty g(t) J_{\frac{n-2}{2}+k}(|\xi|t) t^{\frac{n}{2}+k} dt (2\pi)^{-k} P_k(\xi) \\ &= \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}+k} i^{-k}}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}+k}} \int_0^\infty g(t) J_{\frac{n-2}{2}+k}(|\xi|t) t^{\frac{n}{2}+k} dt P_k(\xi)\end{aligned}$$

Si separamos en el polinomio $P_k(x)$ la parte radial utilizando la homogeneidad obtenemos:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}+k} i^{-k}}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}+k}} \int_0^\infty g(t) t^k J_{\frac{n-2}{2}+k}(|\xi|t) t^{\frac{n}{2}} dt P_k\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

La parte radial de la función f es $g(|x|)|x|^k$, denotándola por $f_0(|x|)$ llegamos a:

$$\hat{f}(\xi) = \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}+k} i^{-k}}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}+k}} \int_0^\infty f_0(t) J_{\frac{n-2}{2}+k}(|\xi|t) t^{\frac{n}{2}} dt P_k\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

donde $f(x) = f_0(|x|) P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$.

Aplicando esta fórmula a la descomposición que habíamos obtenido de una función en armónicos esféricos llegamos a la expresión:

$$\hat{f}(\xi) \sim \sum_{k,j} \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}+k} i^{-k}}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}+k}} \int_0^\infty f_{k,j}(t) J_{\frac{n-2}{2}+k}(|\xi|t) t^{\frac{n}{2}} dt \mathcal{Y}_j^{(k)}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

donde J_l denota la función de Bessel de orden l .

Tal como está definido el operador T por medio de su transformada de Fourier:

$$(Tf)\hat{\sim}(\xi) = \chi_{B(0,1)}(\xi) \hat{f}(\xi)$$

podemos obtenerlo mediante:

$$Tf(x) = ((Tf)\hat{\sim})(x) = (\chi_{B(0,1)} \hat{f})\hat{\sim}(x)$$

La expresión calculada para \hat{f} nos da la fórmula:

$$\begin{aligned}
Tf(x) &= \sum_{k,j} \frac{(2\pi)^{-n}(-1)^k}{|x|^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^1 \frac{J_{\frac{n-2}{2}+k}(|x|t)t^{\frac{n}{2}}}{t^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty f_{k,j}(s) J_{\frac{n-2}{2}+k}(ts) s^{\frac{n}{2}} ds dt \mathcal{Y}_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \\
&= \sum_{k,j} \frac{c(-1)^k}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} f_{k,j}(s) (|x|s)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 J_{\frac{n-2}{2}+k}(t|x|) J_{\frac{n-2}{2}+k}(ts) t dt ds \mathcal{Y}_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right) \\
&=: \sum_{k,j} \frac{c(-1)^k}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} T_{\frac{n-2}{2}+k}(f_{k,j}(s) s^{\frac{n-1}{2}})(|x|) \mathcal{Y}_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)
\end{aligned}$$

donde

$$T_l g(r) = \int_0^\infty g(s) (rs)^{1/2} \int_0^1 J_l(tr) J_k(ts) t dt ds$$

Estas fórmulas para \hat{f} y para Tf se simplifican si la función f es radial. En ese caso su descomposición en armónicos esféricos es tan simple como $f(x) = f_0(|x|)$ donde f_0 es la proyección radial de f , y su transformada de Fourier, que va a ser también una función radial va a ser simplemente:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(t|\xi|) f_0(t)}{(t|\xi|)^{\frac{n-2}{2}}} t^{n-1} dt \\
&= \frac{c}{|\xi|^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty f_0(t) J_{\frac{n-2}{2}+k}(|\xi|t) t^{\frac{n}{2}} dt
\end{aligned}$$

La fórmula para el operador T queda igualmente simplificada:

$$\begin{aligned}
Tf(r) &= \frac{c}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty s^{n/2} f_0(s) \int_0^1 J_{\frac{n-2}{2}}(ts) J_{\frac{n-2}{2}}(tr) t dt ds \\
&= \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} f_0(s) \sqrt{rs} \int_0^1 J_{\frac{n-2}{2}}(ts) J_{\frac{n-2}{2}}(tr) t dt ds
\end{aligned}$$

Volvamos al caso general, en cada uno de los sumandos observamos una conjugación con la función $u(r) = r^{\frac{n-1}{2}}$ y una expresión que llamaremos "núcleo" del operador $T_{\frac{n-2}{2}+k}$:

$$K_{\frac{n-2}{2}+k}(r, s) = \sqrt{rs} \int_0^1 J_{\frac{n-2}{2}+k}(tr) J_{\frac{n-2}{2}+k}(ts) t dt$$

Una estimación de von Lommel (ver [W] pag. 134) permite escribir este núcleo de la forma:

$$K_{\frac{n-2}{2}+k}(r, s) = \sqrt{rs} \frac{s J'_{\frac{n-2}{2}+k}(s) J_{\frac{n-2}{2}+k}(r) - r J_{\frac{n-2}{2}+k}(s) J'_{\frac{n-2}{2}+k}(r)}{r^2 - s^2}.$$

Para demostrar esa igualdad basta con observar que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(t \frac{r J_{k+1}(rt) J_k(st) - s J_k(rt) J_{k+1}(st)}{r^2 - s^2} \right) \\ = t J_k(rt) J_k(st) \end{aligned}$$

cosa inmediata a partir de las fórmulas de recurrencia (1) y (2) de las enunciadas anteriormente, pues con ellas expresamos:

$$\begin{aligned} J_{k+1}(r) &= \frac{k}{r} J_k(r) - J'_k(r) \\ J'_{k+1}(r) &= \frac{r^2 - k(k+1)}{r^2} J_k(r) + \frac{k+1}{r} J'_k(r) \end{aligned}$$

Llegamos así a:

$$\int_0^1 J_k(rt) J_k(st) t dt = \frac{r J_{k+1}(r) J_k(s) - s J_k(r) J_{k+1}(s)}{r^2 - s^2}$$

de nuevo las mismas fórmulas de recurrencia (1) y (2) nos permiten escribir esta expresión en términos de funciones de Bessel de un mismo grado:

$$\begin{aligned} t \frac{r J_{k+1}(rt) J_k(st) - s J_k(rt) J_{k+1}(st)}{r^2 - s^2} \\ = t \frac{s J'_k(st) J_k(rt) - r J'_k(rt) J_k(st)}{r^2 - s^2} \end{aligned}$$

Finalmente, la fórmula para el núcleo del operador $T_{\frac{n-2}{2}+k}$ se puede separar en cuatro términos, utilizando la descomposición en fracciones simples, obteniéndose:

$$\begin{aligned} K_{\frac{n-2}{2}+k}(r, s) &= \frac{\sqrt{rs}}{2} \frac{J'_{\frac{n-2}{2}+k}(s) J_{\frac{n-2}{2}+k}(r)}{r - s} - \frac{\sqrt{rs}}{2} \frac{J_{\frac{n-2}{2}+k}(s) J'_{\frac{n-2}{2}+k}(r)}{r - s} \\ &\quad - \frac{\sqrt{rs}}{2} \frac{J'_{\frac{n-2}{2}+k}(s) J_{\frac{n-2}{2}+k}(r)}{r + s} - \frac{\sqrt{rs}}{2} \frac{J_{\frac{n-2}{2}+k}(s) J'_{\frac{n-2}{2}+k}(r)}{r + s} \end{aligned}$$

Esta expresión de los núcleos K nos da la descomposición que buscábamos del operador T .

Véase también el artículo de A. Córdoba [C2] donde se llega a esta descomposición de forma directa a partir de la ecuación de Bessel.

§4 ALGUNOS LEMAS SOBRE FUNCIONES DE BESSEL

Vamos a utilizar dos tipos diferentes de estimaciones para las funciones de Bessel.

En el capítulo II las acotaciones tienen en cuenta las oscilaciones de dichas funciones para argumentos grandes. Estas oscilaciones se estudian en el Lema 1.4, en el que se demuestra el acercamiento de las funciones de Bessel a funciones coseno y el de sus derivadas a funciones seno.

La situación es diferente en los capítulos III, IV y V. Las acotaciones empleadas allí no tienen en cuenta esa oscilación sino que constituyen una estimación superior de las funciones de Bessel en valor absoluto. El Lema 1.5 recoge la estimación fundamental en estos casos.

LEMA 1.4.

Definamos las funciones:

$$L_k(t) = J_k(t) - \frac{\sqrt{2/\pi}}{t^{1/2}} \cos(t - (2k-1)\frac{\pi}{4})$$

$$R_k(t) = J'_k(t) + \frac{\sqrt{2/\pi}}{t^{1/2}} \sin(t - (2k-1)\frac{\pi}{4})$$

Entonces, existe una constante finita, $c_k > 0$, tal que $\forall t > 0$:

- (1) $|J_k(t)|, |J'_k(t)| \leq c_k$
- (2) $|t^{1/2} J_k(t)|, |t^{1/2} J'_k(t)| \leq c_k$
- (3) $|t^{1/2} L_k(t)|, |t^{1/2} R_k(t)| \leq c_k$
- (4) $|t^{3/2} L'_k(t)|, |t^{3/2} R'_k(t)| \leq c_k$

Estas estimaciones, que serán utilizadas en el capítulo II, no son óptimas en cuanto a su dependencia con el parámetro k . No ocurre así con las estimaciones que se utilizarán en los capítulos III, IV y V.

PRUEBA (LEMA 1.4):

Es fácil deducir que el comportamiento de las funciones de Bessel para $t \rightarrow 0$ es:

$$J_k(t) \simeq c_k t^k \quad t \rightarrow 0$$

Por otro lado, en la referencia [SW] pag.158 se prueba que:

$$J_k(t) \simeq c_k t^{-\frac{1}{2}} \quad t \rightarrow \infty$$

De estas estimaciones, la segunda es la mitad del apartado (2) del lema y juntas nos dan $|J_k(t)| \leq c_k$, que es la mitad del apartado (1).

Utilizando la fórmula de recurrencia (número (2) de las enunciadas):

$$J'_k(t) = \frac{1}{2}(J_{k-1}(t) - J_{k+1}(t))$$

traducimos las propiedades de J_k en propiedades de J'_k , y de esta forma se prueba el resto de los apartados (1) y (2) del lema.

Por otro lado, cada una de las acotaciones del apartado (3) es una consecuencia inmediata de su correspondiente del apartado (2). Queda pues por probar solamente el apartado (4).

En el libro [SW] pag. 158 se prueba también que:

$$|t^{\frac{3}{2}} L_k(t)| \leq c_k \quad t \rightarrow \infty$$

y al ser $J_k(t) \leq c_k$ se obtiene directamente esta misma estimación para $t \rightarrow 0$. Vamos a obtener ahora a partir de esta estimación con L_k la correspondiente a L'_k .

Llamemos

$$V_k(t) = \frac{\sqrt{2/\pi}}{t^{1/2}} \cos(t - (2k-1)\frac{\pi}{4})$$

Entonces, al derivar, como $\sin x = \frac{1}{2}(\cos(x - \frac{\pi}{2}) - \cos(x + \frac{\pi}{2}))$ se tiene:

$$\begin{aligned} V'_k(t) &= -\frac{\sqrt{2/\pi}}{2t^{3/2}} \cos(t - (2k-1)\frac{\pi}{4}) - \frac{\sqrt{2/\pi}}{2t^{3/2}} \sin(t - (2k-1)\frac{\pi}{4}) \\ &= -\frac{\sqrt{2/\pi}}{2t^{3/2}} \cos(t - (2k-1)\frac{\pi}{4}) \\ &\quad - \frac{\sqrt{2/\pi}}{2t^{3/2}} (\cos(t - (2(k-1)-1)\frac{\pi}{4}) - \cos(t - (2(k+1)-1)\frac{\pi}{4})) \\ &= -\frac{\sqrt{2/\pi}}{2t^{3/2}} \cos(t - (2k-1)\frac{\pi}{4}) - \frac{1}{2}(V_{k-1}(t) - V_{k+1}(t)) \end{aligned}$$

La expresión de $J'_k(t)$ en términos de J_{k-1} y J_{k+1} nos da:

$$\begin{aligned} L'_k(t) &= J'_k(t) - V'_k(t) \\ &= \frac{1}{2}(L_{k-1}(t) - L_{k+1}(t)) + \frac{\sqrt{2/\pi}}{2t^{3/2}} \cos(t - (2k-1)\frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Hacemos uso ahora de la estimación que se prueba en [SW] sobre L_k y concluimos la prueba para L'_k .

Para la segunda parte de (4) observamos que de forma similar a lo que hemos hecho se obtiene:

$$R_k(t) = J'_k(t) - \frac{1}{2}(V_{k-1}(t) - V_{k+1}(t))$$

y la misma fórmula de recurrencia nos da:

$$R_k(t) = \frac{1}{2}(L_{k-1}(t) - L_{k+1}(t))$$

Por tanto,

$$R'_k(t) = \frac{1}{2}(L'_{k-1}(t) - L'_{k+1}(t))$$

y la estimación para R'_k se obtiene directamente de la de L'_k , que acabamos de obtener. ■

La descomposición que hemos hecho del núcleo del operador del disco podemos expresarla de una forma simplificada utilizando las funciones:

$$\begin{aligned}\mu_k(t) &= t^{1/2} J_k(t) & t > 0 \\ \sigma_k(t) &= t^{1/2} J'_k(t) & t > 0\end{aligned}$$

De ellas sabemos por el Lema 1.4 que acabamos de probar que están acotadas por una constante que depende de k . El lema siguiente nos da las estimaciones básicas que necesitaremos para estas funciones. Por razones técnicas, supondremos siempre $k \geq 1$.

LEMA 1.5.

Para $t > 0$ se cumplen las siguientes acotaciones con constantes independientes de k :

(1)

$$|\mu_k(t)| \leq C(k^{-1/6} + |\frac{k-t}{k+t}|^{1/4})^{-1}$$

(2)

$$|\sigma_k(t)| \leq C(k^{-1/6} + |\frac{k-t}{k+t}|^{1/4})$$

PRUEBA (LEMA 1.5):

Cuando consideramos valores de t suficientemente apartados de k , por ejemplo $0 \leq t \leq k/2$ y $3k/2 < t$ la función $k^{-1/6} + |\frac{k-t}{k+t}|^{1/4}$ es prácticamente una constante, luego en esos intervalos las desigualdades (1) y (2) sólo nos dicen que $|\mu_k(t)|$ y $|\sigma_k(t)|$ están acotadas independientemente de k .

Comencemos probando la primera de ellas. Para $0 \leq t \leq k/2$ la representación de J_k como serie de potencias (ver [W] p. 91) junto con la estimación $n! \geq Cn^n e^{-n}$ nos da:

$$|t^{1/2} J_k(t)| \leq t^{1/2} \left(\frac{t}{2}\right)^k \frac{1}{k!} e^{-t^2/4} \leq C t^{1/2} \frac{t^k e^{-t^2/4}}{2^k k^k e^{-k}} \leq C \frac{t^{1/2} e^k}{e^{t^2/4} 4^k} \leq C$$

Para los intervalos $k/2 < t < 3k/2$ y $t \geq 3k/2$ consideramos la siguiente representación asintótica que encontramos en el libro de A. Erdélyi [E] p. 107:

$$J_k(kr) = k^{-1/6} \left(\frac{r}{2}\phi'\right)^{-1/2} Ai(-k^{2/3}\phi)(1 + O(k^{-1}))$$

donde

$$Ai(-x) = \frac{1}{3} x^{1/2} (J_{-1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}) + J_{1/3}(\frac{2}{3}x^{3/2}))$$

es la función de Airy y ϕ se define por la ecuación

$$\phi(x)(\phi'(x))^2 = 1 - x^{-2}$$

que tiene una única solución, esa solución es diferenciable y además $\phi' \neq 0$ para todo $x > 0$ (ver [E] p. 104).

La función de Airy por su parte podemos estimarla en esta expresión utilizando que ([E] p.97)

$$|Ai(z)|(1 + |z|^{1/4})e^{2z^{3/2}/3} \leq C \quad -\pi \leq \arg z \leq \pi$$

pues si $-x$ es un número real negativo se tiene $(-x)^{3/2} = -ix^{3/2}$, luego $|\exp(\frac{2}{3}(-x)^{3/2})| = |\exp(-i\frac{2}{3}|x|^{3/2})| = 1$ y entonces

$$|Ai(-x)| \leq \frac{C}{1 + |x|^{1/4}} \leq \frac{C}{(1 + |x|)^{1/4}}$$

Tenemos entonces la acotación:

$$\begin{aligned} |(kr)^{1/2} J_k(kr)| &\cong (k^{1/6} + k^{-5/6})(\phi')^{-1/2} Ai(-k^{2/3}\phi) \\ &\leq \frac{C(k^{1/6} + k^{-5/6})}{(\phi')^{1/2}(1 + k^{2/3}|\phi|)^{1/4}} \\ &\leq \frac{C(k^{1/6} + k^{-5/6})}{((\phi')^2 + k^{2/3}|1 - r^{-2}|)^{1/4}} \\ &= \frac{Ck^{-5/6}}{((\phi')^2 + k^{2/3}|1 - r^{-2}|)^{1/4}} + \frac{C}{(k^{-2/3}|\phi'|^2 + |1 - r^{-2}|)^{1/4}} \end{aligned}$$

El primero de estos sumandos podemos acotarlo directamente por una constante ya que ϕ' no vale nunca 0.

Para $r > 3/2$ estimamos:

$$|(kr)^{1/2} J_k(kr)| \leq C + \frac{C}{|1 - r^{-2}|^{1/4}} \leq C$$

luego $|t^{1/2} J_k(t)| \leq C$ si $t > 3k/2$.

Para el intervalo $1/2 \leq r \leq 3/2$ recordamos que $\phi'(r)$ no puede ser cero y acotamos:

$$\begin{aligned} |(kr)^{1/2} J_k(kr)| &\leq \frac{C}{k^{-1/6} + |1 - r^{-2}|^{1/4}} \\ &\leq \frac{C}{k^{-1/6} + |\frac{r-1}{r+1}|^{1/4}} \end{aligned}$$

Esto prueba que si $k/2 < t < 3k/2$

$$|t^{1/2} J_k(t)| \leq C(k^{-1/6} + |\frac{t-k}{t+k}|^{1/4})^{-1}$$

En cuanto a $\sigma_k(t)$ la fórmula

$$J'_k(t) = \frac{1}{2}(J_{k-1}(t) - J_{k+1}(t))$$

demuestra la acotación uniforme en los intervalos $0 \leq t \leq k/2$ y $t \geq 3k/2$ a partir de la de la función μ_k en esos mismos intervalos.

Resta solamente estimar $\sigma_k(t)$ en $k/2 < t < 3k/2$. Utilizaremos la identidad ([W] p. 135)

$$\int_0^1 2kr(J_k(krt))^2 t dt = kr(J'_k(kr))^2 + (1 - r^{-2})kr(J_k(kr))^2$$

donde el primer sumando del segundo miembro es el cuadrado del término que queremos acotar. Mayoramos ahora los otros dos términos de la identidad. Utilizando lo ya probado para $1/2 < r < 3/2$ se tiene:

$$|1 - r^{-2}|kr(J_k(kr))^2 \leq |\frac{r-1}{r}| \frac{C}{(k^{-1/6} + |\frac{r-1}{r+1}|^{1/4})^2} \leq C|r-1|^{1/2}$$

Por otro lado, un cambio de variable nos da

$$2kr \int_0^1 (J_k(krt))^2 t dt = \frac{1}{r} \int_0^r 2ku (J_k(ku))^2 du = \frac{1}{r} \left(\int_0^1 + \int_1^r \right)$$

La primera de estas integrales corresponde a la identidad que hemos extraído de la referencia [W] p. 135 evaluada en $r = 1$. Recordando además que $|J'_k(k)| \leq Ck^{-2/3}$ (ver [W] p. 260) obtenemos:

$$\int_0^1 2ku (J_k(ku))^2 du = k(J'_k(k))^2 \leq Ck^{-1/3}$$

En la segunda utilizamos la acotación probada para μ_k :

$$\begin{aligned} \frac{2}{r} \int_1^r ku (J_k(ku))^2 du &\leq \frac{C}{r} \int_1^r \left| \frac{1+u}{1-u} \right|^{1/2} du \\ &\leq C \int_0^r |1-u|^{-1/2} du \leq C|1-r|^{1/2} \end{aligned}$$

Uniendo estas dos estimaciones probamos para $1/2 < r < 3/2$:

$$\begin{aligned} |(kr)^{1/2} J'_k(kr)| &\leq C \left(\frac{k^{-1/3}}{r} + |1-r|^{1/2} \right)^{1/2} \\ &\leq C(k^{-1/6} + |1-r|^{1/4}) \\ &\leq C(k^{-1/6} + \left| \frac{1-r}{1+r} \right|^{1/4}) \end{aligned}$$

Entonces, si $k/2 < t < 3k/2$:

$$|t^{1/2} J'_k(t)| \leq C(k^{-1/6} + \left| \frac{k-t}{k+t} \right|^{1/4})$$

■

G. Mockenhaupt [Mo] probó este resultado como herramienta para demostrar una estimación con peso para las sumas parciales esféricas en $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Aparte de este lema necesitaremos la siguiente acotación sobre las funciones σ_k y μ_k :

$$|\sigma_k(t)| \|\mu_k\|_\infty \leq C \quad 0 < t < k$$

para una constante C independiente de k .

Esta desigualdad es consecuencia del Lema 1.5 y de la estimación

$$|J'_k(t)| \leq Ck^{-2/3} \quad 0 < t < k$$

Que nos dan:

$$\begin{aligned} |\sigma_k(t)| \|\mu_k\|_\infty &= c |t^{1/2} J'_k(t)| \|\mu_k\|_\infty \\ &\leq c |k^{1/2} k^{-2/3}| \|\mu_k\|_\infty \leq C k^{-1/6} k^{1/6} = C \end{aligned}$$

La demostración de la citada estimación sobre J'_k requiere como parte fundamental el comprobar que

$$\left| \int_0^{2\pi} \sin t e^{i(-kt + x \sin t)} dt \right| \leq \frac{C}{k^{2/3}}$$

Para probarlo consideremos en primer lugar la integral en $(0, \pi)$. Llamemos $\psi(t) = \frac{x}{k} \sin t - t$. Observamos que en la región $0 \leq x \leq k$ se cumple

$$\begin{aligned} |\psi'(t)| &= 1 - \frac{x}{k} \cos t \geq 1 - \cos t \geq ct^2 \\ |\psi''(t)| &= \frac{x}{k} \sin t \leq t \end{aligned}$$

Separemos la integral que estamos considerando en dos partes:

$$\left| \int_0^\pi \right| \leq \left| \int_0^{k^{-1/3}} \right| + \left| \int_{k^{-1/3}}^\pi \right| = A + B$$

De ellas, la primera cumple la estimación fácilmente:

$$A \leq \left| \int_0^{k^{-1/3}} \sin t dt \right| \leq \left| \int_0^{k^{-1/3}} t dt \right| = \frac{1}{2k^{2/3}}$$

Para acotar la segunda utilizamos los comentarios que hemos hecho sobre ψ . Una integración por partes da:

$$\begin{aligned} B &= \left| \int_{k^{-1/3}}^\pi \frac{\sin t}{k\psi'(t)} k\psi'(t) e^{ik\psi(t)} dt \right| \leq \left| \left[\frac{\sin t e^{ik\psi(t)}}{k\psi'(t)} \right]_{k^{-1/3}}^\pi \right| \\ &\quad + \frac{1}{k} \left| \int_{k^{-1/3}}^\pi \left[\frac{|\cos t|}{|\psi'(t)|} + \frac{|\sin t \psi''(t)|}{|\psi'(t)|^2} \right] dt \right| \\ &\leq \frac{C}{k} \left[k^{1/3} + \int_{k^{-1/3}}^\infty \frac{1}{t^2} dt \right] = \frac{C}{k^{2/3}} \end{aligned}$$

En cuanto a la integral en $(\pi, 2\pi)$ la separación que hemos de hacer consiste en los intervalos $(\pi, 2\pi - k^{-1/3})$ y $(2\pi - k^{-1/3}, 2\pi)$. El resto es idéntico.

Definamos ahora la función

$$\tau_k(s) = \min(k^{1/6}, \left| \frac{|s| + k}{|s| - k} \right|^{1/4})$$

para $s \in \mathbf{R}$. Entonces el Lema 1.5 nos prueba que

$$|\mu_k(t)| \leq c\tau_k(t), \quad t > 0$$

y

$$|\sigma_k(t)| \leq c\tau_k^{-1}(t) = c \max(k^{-1/6}, \left| \frac{|t| - k}{|t| + k} \right|^{1/4}), \quad t > 0$$

Los siguientes tres lemas sirven para estudiar esta función τ_k y su relación con la clase de pesos A_1 . Estos lemas serán fundamentales en los capítulos III, IV y V.

LEMA 1.6.

τ_k^α es un peso de A_1 para todo $\alpha < 4$ uniformemente en k .

(Tanto este resultado como los que siguen se referirán siempre al caso de una dimensión, es decir, A_1 significa $A_1(\mathbf{R})$)

PRUEBA (LEMA 1.6):

Observamos en primer lugar que el máximo y el mínimo de dos pesos A_p son también pesos de A_p .

Conseguiremos probar que $\tau_k^\alpha(x)$ está en la clase A_1 si probamos que está allí la función

$$\left| \frac{|x| + k}{|x| - k} \right|^{\alpha/4}$$

Observemos ahora que A_1 es invariante por dilataciones: consideremos un peso $u \in A_1$ y la dilatación

$$u^k(x) = u\left(\frac{x}{k}\right)$$

Si M denota la función maximal de Hardy-Littlewood entonces se cumple que $Mu \leq Cu$ en casi todo punto, y por tanto:

$$M(u^k)(x) = Mu\left(\frac{x}{k}\right) \leq Cu\left(\frac{x}{k}\right) = Cu^k(x)$$

Es decir, $u^k \in A_1$ si $u \in A_1$, además, las constantes A_1 de ambos pesos, u y u^k , coinciden.

Teniendo en cuenta esta observación nos es suficiente probar que está en A_1 la función

$$w(x) = \left| \frac{|x|+1}{|x|-1} \right|^{\alpha/4}$$

La demostración es sencilla pues basta observar que

$$w(x) \sim \max(1, \frac{1}{|x-1|^{\alpha/4}}, \frac{1}{|x+1|^{\alpha/4}})$$

y que tanto $|x-1|^{-\gamma}$ como $|x+1|^{-\gamma}$ son pesos de A_1 siempre que $0 \leq \gamma < 1$. (La relación " $A \sim B$ " significará a lo largo de esta memoria que existen constantes universales positivas, c y C , tales que $c \leq A/B \leq C$). ■

En el próximo lema el resultado no se aplica específicamente a la función τ_k sino a otras más generales.

Definamos un modificado del operador de Hardy-Littlewood, M_β mediante:

$$M_\beta f(x) = \sup_{x \in Q} \left(\frac{1}{|Q|} \int_Q |u|^\beta \right)^{1/\beta}$$

LEMA 1.7.

Sea v tal que $v^\gamma \in A_1$ para todo $1 < \gamma < 2$. Entonces $vM_\beta u \in A_1$ para todo $\beta > 2$ y toda función medible u siempre que $M_\beta u < \infty$ en casi todo punto.

En particular, este lema aplicado a la función τ_k junto con el Lema 1.6 nos dice que

$$\tau_k^2 M_\beta u \in A_1$$

para todo $\beta > 2$ y toda función u , uniformemente en k .

LEMA 1.8.

$\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}} M_\beta(|y|^{1/2} u(y))(x)$ es un peso de A_1 uniformemente en k para todo $\beta > 2$ y toda u siempre que $M_\beta(|y|^{1/2} u(y))(x) < \infty$ para casi todo x .

PRUEBA (LEMA 1.7):

Tomemos un intervalo I y calculemos allí la media de la función $vM_\beta u$, acotándola mediante la desigualdad de Hölder :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{|I|} \int_I v M_\beta u \leq \frac{1}{|I|} \left(\int_I v^\gamma \right)^\gamma \left(\int_I (M_\beta u)^{\gamma'} \right)^{1/\gamma'} \\ &= \left(\frac{1}{|I|} \int_I v^\gamma \right)^\gamma \left(\frac{1}{|I|} \int_I (M_\beta u)^{\gamma'} \right)^{1/\gamma'} \\ &= \left(\frac{1}{|I|} \int_I v^\gamma \right)^\gamma \left(\frac{1}{|I|} \int_I (Mu^\beta)^{\gamma'/\beta} \right)^{1/\gamma'} \end{aligned}$$

Utilizamos ahora que v^γ está en A_1 para $1 < \gamma < 2$. También sabemos (ver [GR]) que $(Mf)^\varepsilon \in A_1$ siempre que $\varepsilon < 1$ cuando Mf es finito en casi todo punto.

Eligiendo γ tal que $1 < \gamma < 2 < \gamma'$ tendremos:

$$\begin{aligned} m &\leq C(\inf_I v^\gamma)^{1/\gamma} \left(\frac{1}{|I|} \int_I (Mu^\beta)^{\gamma'/\beta} \right)^{1/\gamma'} \\ &\leq C(\inf_I v)(\inf_I M_\beta u) \\ &\leq C \inf_I v M_\beta u \end{aligned}$$

Como por hipótesis $1 < \gamma < 2$ entonces $2 < \gamma' < \infty$, luego para todo $\beta > 2$ existe un $\gamma' < \beta$ que nos permite aplicar este argumento. Por tanto el lema se cumple para todo $\beta > 2$. ■

PRUEBA (LEMA 1.8):

Comenzamos probando que $(\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}})^\alpha \in A_1$ si $\alpha < 2$. Lo podemos hacer estimando la función de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}} &\sim \frac{1}{|x|^{1/2}} && \text{si } |x| < \frac{k}{2} \\ \tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}} &\sim \min\left(\frac{1}{||x| - k|^{1/2}}, k^{-1/6}\right) && \text{si } |x| > \frac{k}{2} \end{aligned}$$

Estas dos funciones son pesos de A_1 y lo siguen siendo si las elevamos a potencias α menores que 2, uniformemente en k . Podemos expresar entonces:

$$\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}} \sim \max\left(\frac{1}{|x|^{1/2}}, \min\left(\frac{1}{||x| - k|^{1/2}}, k^{-1/6}\right)\right)$$

Recordemos que el máximo de dos pesos A_1 es un peso de A_1 , pues:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I \max(u, v) &\leq \frac{1}{|I|} \int_I u + \frac{1}{|I|} \int_I v \\ &\leq C_1 \inf_I u + C_2 \inf_I v \leq (C_1 + C_2) \inf_I (\max(u, v)) \end{aligned}$$

y lo mismo ocurre con el mínimo, por un argumento similar.

Con ello hemos probado que $(\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}})^\alpha$ es un peso de A_1 para $\alpha < 2$.

Ahora acotamos por Hölder :

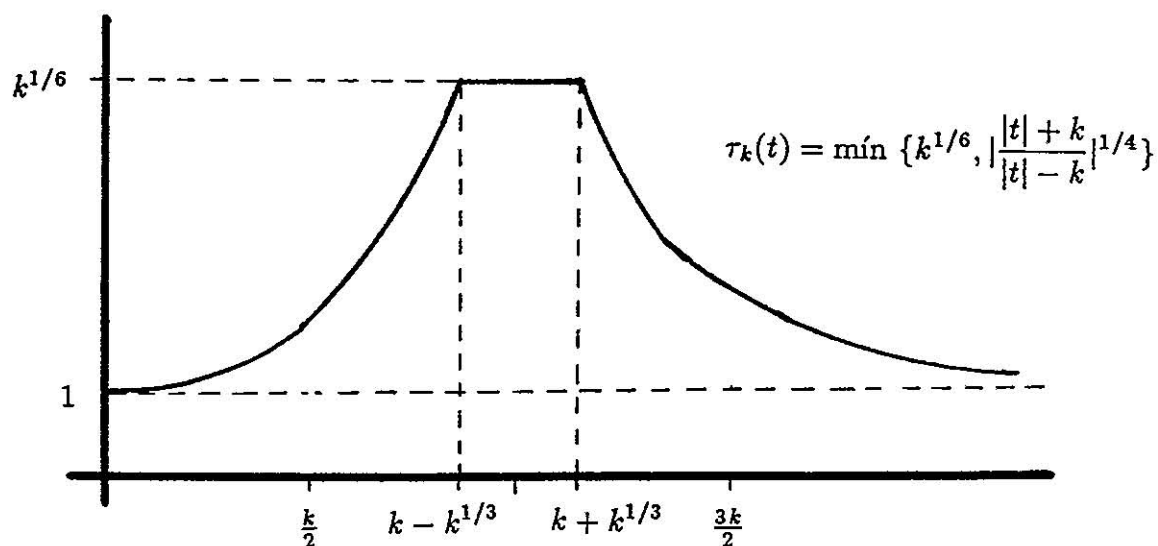
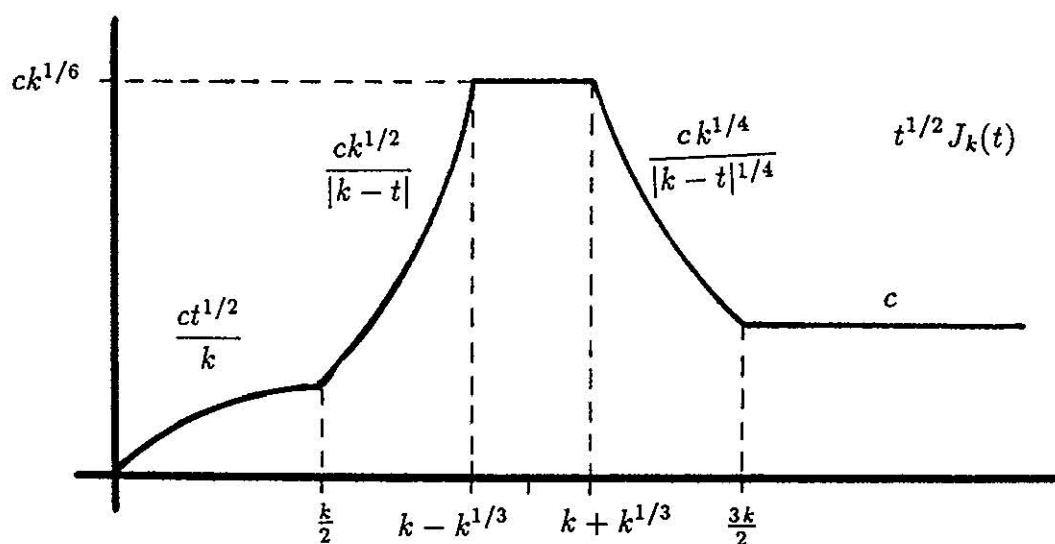
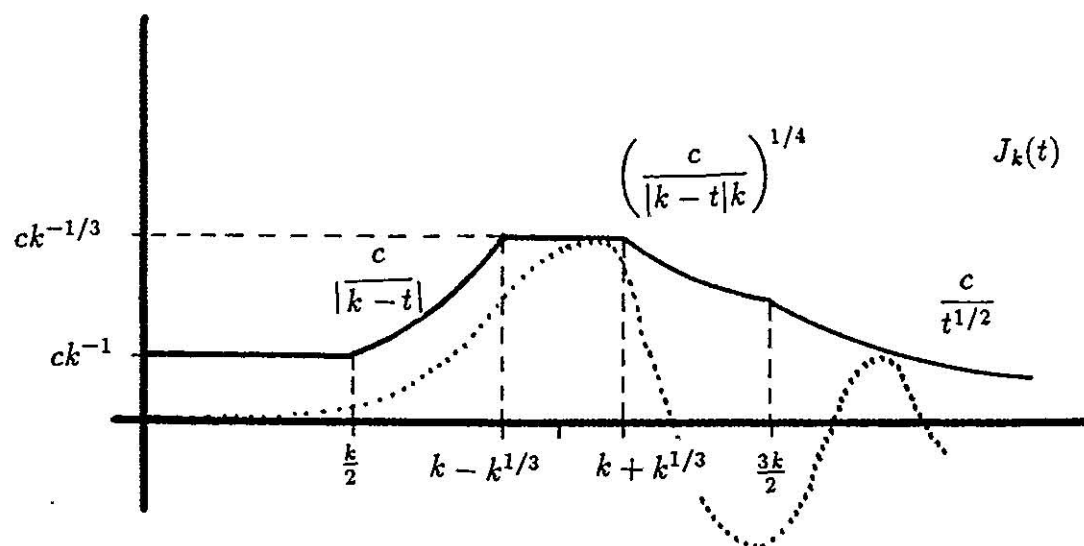
$$\begin{aligned} \frac{1}{|I|} \int_I \tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}} M_\beta(u(s)s^{1/2})(x) dx \\ \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}})^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\frac{1}{|I|} \int_I (M_\beta(u(s)s^{1/2})(x))^{\alpha'} \right)^{1/\alpha'} \\ \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}})^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\frac{1}{|I|} \int_I (M(u^\beta(s)s^{\beta/2})(x))^{\alpha'/\beta} \right)^{1/\alpha'} \end{aligned}$$

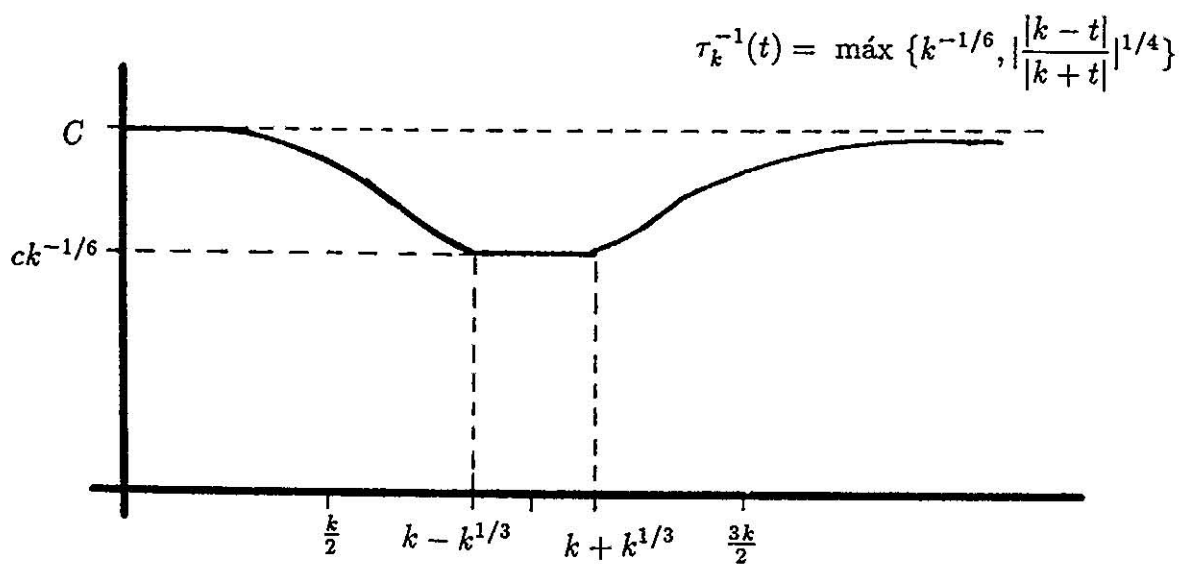
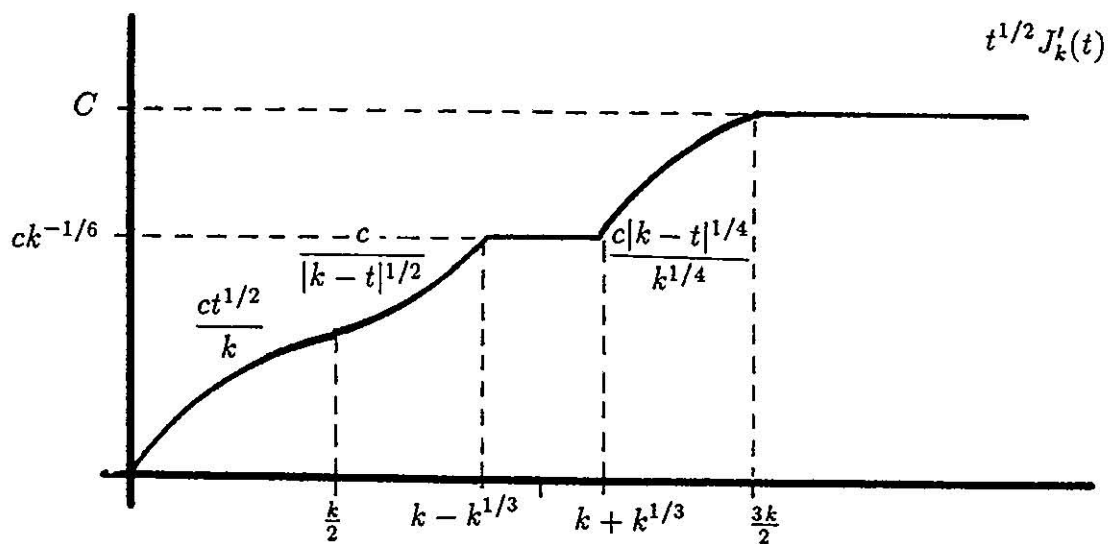
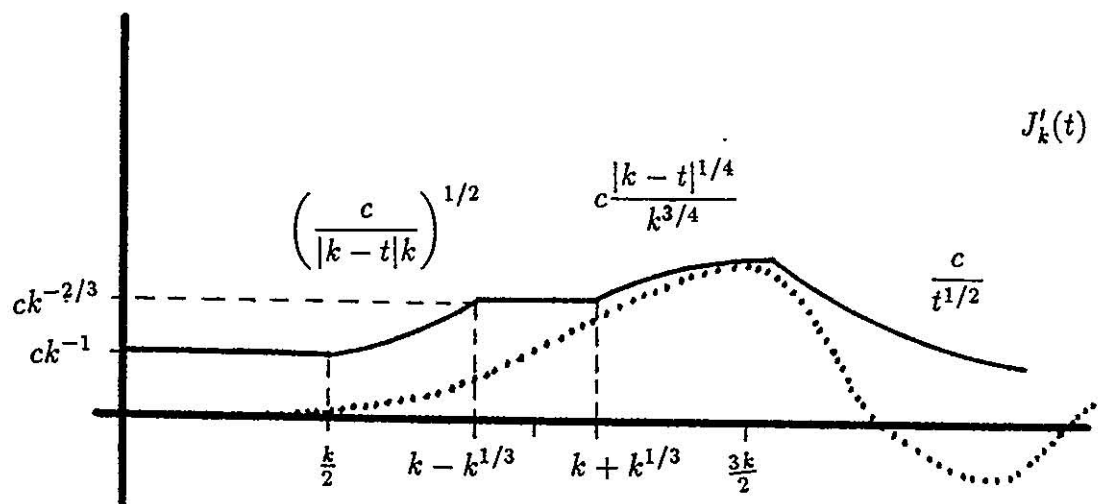
Utilizamos ahora que las funciones que estamos integrando son pesos de A_1 para $\alpha < 2$ la primera de ellas y para $\alpha' < \beta$ la segunda. Entonces, eligiendo α tal que $1 < \alpha < 2 < \alpha' < \beta$ mayoramos lo anterior por

$$\begin{aligned} &\leq C \left(\inf_I (\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}})^\alpha \right)^{1/\alpha} \left(\inf_I (M(u^\beta(s)s^{\beta/2})(x))^{\alpha'/\beta} \right)^{1/\alpha'} \\ &\leq C \inf_I (\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}}) \inf_I (M_\beta(u(s)s^{1/2})(x)) \\ &\leq C \inf_I (\tau_k^2(x) \frac{1}{|x|^{1/2}} M_\beta(u(s)s^{1/2})(x)) \end{aligned}$$

Esto es válido, igual que en el lema anterior, para todo $\beta > 2$. ■

Los gráficos de las páginas siguientes nos darán una idea de la diferencia entre las estimaciones conocidas para $t^{1/2} J_k(t)$ y $t^{1/2} J'_k(t)$ (véase [B]) y las que utilizaremos a partir de τ_k y τ_k^{-1} respectivamente.





CAPITULO II

EL OPERADOR MAXIMAL DE CARLESON SOBRE FUNCIONES RADIALES: ACOTACIONES EXTREMALES Y ESTIMACIONES CON PESO

§1 Acotaciones extremales	37
§2 Mayoración del operador maximal	39
§3 Prueba de las acotaciones extremales	44
§4 Acotaciones con peso del multiplicador del disco para funciones radiales	47
§5 Extensión de las acotaciones con pesos para polinomios armónicos 51	

CAPITULO II

EL OPERADOR MAXIMAL DE CARLESON SOBRE FUNCIONES RADIALES: ACOTACIONES EXTREMALES Y ESTIMACIONES CON PESO

§1 ACOTACIONES EXTREMALES

Como ya hemos mencionado anteriormente, el estudio de la acción del multiplicador del disco, T , sobre funciones radiales fue llevado a cabo por Herz [H] quien probó la acotación sobre $L_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$. Posteriormente, C. Kenig y P. Tomas [KT] demostraron que T no es de tipo débil sobre $L_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $p = \frac{2n}{n+1}$. S. Chanillo obtuvo sin embargo un resultado positivo al demostrar que es de tipo débil restringido sobre $L_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para el mismo exponente p .

El objeto de nuestro estudio no va a ser este operador T sino, de hecho, el maximal asociado a la convergencia esférica de integrales de Fourier. Si definimos las sumas parciales S_R mediante

$$S_R f(x) = T f^R(Rx)$$

para $f^R(x) = f(\frac{x}{R})$, evidentemente con esta notación $S_1 = T$. Nuestro estudio se centrará en el operador:

$$T^* f(x) = \sup_{R>0} |S_R f(x)|$$

normalmente conocido como el operador maximal de Carleson. La estimación que probaremos es la siguiente:

TEOREMA 2.1.

T^* está acotado de $L_{rad}^{p_0,1}(\mathbb{R}^n)$ en $L_{rad}^{p_1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $i = 0, 1$, cuando $p_0 = \frac{2n}{n+1}$ y $p_1 = \frac{2n}{n-1}$.

Observemos que T^* aplica funciones radiales en funciones radiales luego podemos mirarlo como un operador que actúa sobre funciones definidas en el intervalo $(0, \infty)$, y entonces el Teorema 2.1 dice que T^* aplica $L^{p,i,1}((0, \infty), d\nu)$ en $L^{p,i,\infty}((0, \infty), d\nu)$ donde $d\nu$ es la medida $r^{n-1}dr$ e $i = 0, 1$. Entonces, usando la extensión del Teorema de Interpolación de Marcinkiewicz que encontramos en el libro de E. Stein y G. Weiss [SW] se obtiene el siguiente resultado:

COROLARIO 2.2.

T^* lleva $L_{rad}^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L_{rad}^p(\mathbb{R}^n)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$.

También se obtiene como corolario del Teorema 2.1 un resultado de convergencia utilizando los argumentos habituales.

COROLARIO 2.3.

Si $f \in L^{p,i,1}(\mathbb{R}^n)$, $i = 0, 1$, entonces:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} S_R f(x) = f(x) \quad a.e.$$

§2 MAYORACION DEL OPERADOR MAXIMAL

La demostración del Teorema 2.1 utiliza algunos de los lemas técnicos que aparecen en la Introducción, pero se basa primordialmente en un lema sobre ciertos operadores conocidos: el Operador Maximal de Hardy-Littlewood, M ; la Transformada Maximal de Hilbert, \tilde{H} ; el "traspuesto" del operador de Hardy, H_a^t y el Operador Maximal que controla los aspectos de convergencia y que llamaremos Operador de Carleson, \tilde{C} , que se definieron en el capítulo anterior.

LEMA 2.4.

Sea f una función radial y denotemos por f_0 su proyección radial, es decir: $f(x) = f_0(|x|)$. Definamos el operador $Mg(t) = (M + \tilde{H} + H_a^t + \tilde{C})(g)(t)$, entonces:

$$T^*f(x) \leq \frac{c_n}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(f_0(r)r^{\frac{n-1}{2}})(|x|)$$

PRUEBA (LEMA 2.4):

Sea f una función radial, entonces \hat{f} también es radial y se expresa:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(t|\xi|)f_0(t)}{(t|\xi|)^{\frac{n-2}{2}}} t^{n-1} dt$$

Así obtenemos una expresión para el operador S_R cuando actúa sobre funciones radiales:

$$\begin{aligned} S_R f(r) &= \frac{c_n}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty s^{n/2} f_0(s) \int_0^R J_{\frac{n-2}{2}}(ts) J_{\frac{n-2}{2}}(tr) t dt ds \\ &= \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} f_0(s) K^R(r, s) ds \end{aligned}$$

donde llamamos:

$$K^R(r, s) = \sqrt{rs} \int_0^R J_{\frac{n-2}{2}}(ts) J_{\frac{n-2}{2}}(tr) t dt = RK^1(Rr, Rs)$$

El lema quedará probado si demostramos que la desigualdad se cumple para cada S_R independientemente de R .

Reducción

Observemos que en realidad la acotación para todo R se obtiene directamente si podemos probar la acotación para $R = 1$.

La razón es que todos los operadores que aparecen formando parte de \mathcal{M} son invariantes bajo las dilataciones dadas por:

$$g^R(x) = g\left(\frac{x}{R}\right)$$

para las cuales

$$(g^R)^\sim(\xi) = R^n \hat{g}(R\xi)$$

En efecto:

$$\begin{aligned} Mg^R(Rs) &= \sup_h \frac{1}{2h} \int_{Rs-h}^{Rs+h} \left| g\left(\frac{t}{R}\right) \right| dt = \sup_h \frac{1}{2h} \int_{R(s-\frac{h}{R})}^{R(s+\frac{h}{R})} \left| g\left(\frac{t}{R}\right) \right| R d\left(\frac{t}{R}\right) \\ &= \sup_h \frac{R}{2h} \int_{s-\frac{h}{R}}^{s+\frac{h}{R}} |g(u)| du = Mg(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H^* g^R(Rs) &= \sup_{N>\varepsilon>0} \left| \int_{\varepsilon < N < \infty} \frac{g^R(Rs-t)}{t} dt \right| = \sup_{N>\varepsilon>0} \left| \int_{\varepsilon < |t| < N} \frac{g\left(\frac{Rs}{R} - \frac{t}{R}\right)}{t/R} \frac{1}{R} dt \right| \\ &= \tilde{H}g(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}g^R(Rs) &= \sup_{0 < \varepsilon < r, n \in \mathbb{R}} \left| \int_{\varepsilon < |Rs-t| < r} \frac{e^{-int} g^R(t)}{Rs-t} dt \right| \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < r, n \in \mathbb{R}} \left| \int_{\varepsilon < |R(s-\frac{t}{R})| < r} \frac{e^{-inR\frac{t}{R}} g\left(\frac{t}{R}\right)}{R(s-\frac{t}{R})} dt \right| \\ &= \sup_{0 < \varepsilon < r, n \in \mathbb{R}} \left| \int_{\varepsilon < |s-u| < r} \frac{e^{-inu} g(u)}{s-u} du \right| = \tilde{C}g(s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_a^t g^R(Rs) &= \int_{Rs}^{\infty} \frac{g^R(t)}{t} dt \\ &= \int_{Rs}^{\infty} \frac{g\left(\frac{t}{R}\right)}{t/R} \frac{1}{R} dt \\ &= \int_s^{\infty} \frac{g\left(\frac{t}{R}\right)}{t/R} d\left(\frac{t}{R}\right) = H_a^t g(s) \end{aligned}$$

Por tanto, si probamos la acotación para $R = 1$ tendremos:

$$\begin{aligned}
 |S_R g(s)| &= |(Tg^R)(Rs)| \leq \frac{c_n}{(Rs)^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(g_0^R(r)r^{\frac{n-1}{2}})(Rs) \\
 &= \frac{c_n}{s^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(g_0(\frac{r}{R})(\frac{r}{R})^{\frac{n-1}{2}})(Rs) \\
 &= \frac{c_n}{s^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(g_0(r)(r^{\frac{n-1}{2}}))(s)
 \end{aligned}$$

tal como deseamos.

Acotación para $R = 1$

Probemos ahora la acotación para $|Tf|$.

$$Tf(r) = \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} f_0(s) K_1(r, s) ds$$

Para simplificar notación llamaremos $g(s) = s^{\frac{n-1}{2}} f_0(s)$

Podemos descomponer el núcleo K_1 según la expresión que calculamos en la sección 3 del capítulo anterior (ver [W]). En este caso las funciones que estamos manejando son radiales, luego las funciones de Bessel que aparecen en el núcleo K_1 son de índice $\frac{n-2}{2}$. (ver el capítulo I para la descomposición)

$$\begin{aligned}
 K_1(r, s) &= \sqrt{rs} \int_0^1 J_{\frac{n-2}{2}}(ts) J_{\frac{n-2}{2}}(tr) t dt \\
 &= \sqrt{rs} \frac{r J'_{\frac{n-2}{2}}(r) J_{\frac{n-2}{2}}(s) - s J_{\frac{n-2}{2}}(r) J'_{\frac{n-2}{2}}(s)}{r^2 - s^2} \\
 &= \frac{\sqrt{rs}}{2} \frac{J'_{\frac{n-2}{2}}(r) J_{\frac{n-2}{2}}(s)}{r - s} - \frac{\sqrt{rs}}{2} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r) J'_{\frac{n-2}{2}}(s)}{r - s} \\
 &\quad - \frac{\sqrt{rs}}{2} \frac{J'_{\frac{n-2}{2}}(r) J_{\frac{n-2}{2}}(s)}{r + s} - \frac{\sqrt{rs}}{2} \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(r) J'_{\frac{n-2}{2}}(s)}{r + s}
 \end{aligned}$$

Los términos correspondientes a los dos últimos sumandos son fáciles de manejar. Por ejemplo, para el tercero, utilizando las acotaciones básicas de las funciones de

Bessel (Lema 1.4) obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\infty g(s) \frac{\sqrt{rs} J'_{\frac{n-2}{2}}(r) J_{\frac{n-2}{2}}(s)}{s+r} ds \right| \\
& \leq c_n \int_0^\infty \frac{|g(s)|}{s+r} ds \leq c_n \left(\int_0^r \frac{|g(s)|}{s+r} ds + \int_r^\infty \frac{|g(s)|}{s+r} ds \right) \\
& \leq \frac{c_n}{r} \int_0^r |g(s)| ds + c_n \int_r^\infty \frac{|g(s)|}{s} ds \\
& \leq c_n (M + H_a^t)(g)(r)
\end{aligned}$$

Y similarmente acotamos el cuarto término.

Para estimar el primero descomponemos el dominio de integración en tres partes:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_0^\infty g(s) \frac{\sqrt{rs} J'_{\frac{n-2}{2}}(r) J_{\frac{n-2}{2}}(s)}{r-s} ds \right| \\
& = \left| \int_0^{r/2} \right| + \left| \int_{r/2}^{3r/2} \right| + \left| \int_{3r/2}^\infty \right| = I + II + III
\end{aligned}$$

y estimamos por separado las tres integrales. La primera y la tercera resultan sencillas, pues claramente:

$$\begin{aligned}
I & \leq c_n \int_0^{r/2} \frac{|g(s)|}{r-s} ds \leq \frac{c_n}{r} \int_0^r |g(s)| ds \leq c_n M(g)(r) \\
III & \leq c_n \int_{3r/2}^\infty \frac{|g(s)|}{s} ds \leq c_n H_a^t(|g|)(r).
\end{aligned}$$

La estimación de II no es tan directa. Utilizamos el Lema 1.4 de nuevo para obtener:

$$\begin{aligned}
II & \leq c_n \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{s^{1/2} J_{\frac{n-2}{2}}(s) g(s)}{r-s} ds \right| \\
& = c_n \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s) s^{1/2} (J_{\frac{n-2}{2}}(s) - \frac{\sqrt{2/\pi}}{s^{1/2}} \cos(s - (n-4)\frac{\pi}{2}) + \frac{\sqrt{2/\pi}}{s^{1/2}} \cos(s - (n-4)\frac{\pi}{2}))}{r-s} ds \right| \\
& \leq c_n \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s) \cos(s - (n-4)\frac{\pi}{2})}{r-s} ds \right| + c_n \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s) s^{1/2} L_{\frac{n-2}{2}}(s)}{r-s} ds \right| \\
& = A + B
\end{aligned}$$

El primer sumando está acotado directamente por el operador de Carleson:

$$A \leq c_n \tilde{C}(g)(r).$$

Para estimar B utilizamos el Teorema del Valor Medio por el cual sabemos que existe un $\bar{r} \in (\frac{r}{2}, \frac{3r}{2})$ tal que:

$$\begin{aligned} B &\leq c_n |L_{\frac{n-2}{2}}(r)| \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s)s^{1/2}}{r-s} ds \right| + c_n \int_{r/2}^{3r/2} \frac{|g(s)s^{1/2}|}{|r-s|} |r-s| |L'_{\frac{n-2}{2}}(\bar{r})| ds \\ &\leq c_n |L_{\frac{n-2}{2}}(r)| \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s)(s^{1/2} - r^{1/2} + r^{1/2})}{r-s} ds \right| + c_n \int_{r/2}^{3r/2} |g(s)| s^{1/2} |L'_{\frac{n-2}{2}}(\bar{r})| ds \end{aligned}$$

El apartado iv) del Lema 1.4 nos da :

$$\begin{aligned} &\leq c_n |L_{\frac{n-2}{2}}(r)| \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s)(s^{1/2} - r^{1/2})}{r-s} ds \right| + c_n |L_{\frac{n-2}{2}}(r)| \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s)r^{1/2}}{r-s} ds \right| \\ &\quad + \frac{c_n}{r^{3/2}} \int_{r/2}^{3r/2} |g(s)| s^{1/2} ds \end{aligned}$$

Pero observemos que si $r, s > 0$ entonces $|s^{1/2} - r^{1/2}| \leq |s - r|/r^{1/2}$. Utilizando ésto junto con el apartado iii) del Lema 1.4 llegamos a:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c_n}{r^{1/2}} \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s)}{r^{1/2}} ds \right| + c_n \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s)}{r-s} ds \right| + \frac{c_n}{r} \int_{r/2}^{3r/2} |g(s)| ds \\ &\leq \frac{c_n}{r} \int_{r/2}^{3r/2} |g(s)| ds + c_n \left| \int_{r/2}^{3r/2} \frac{g(s)}{r-s} ds \right| + \frac{c_n}{r} \int_{r/2}^{3r/2} |g(s)| ds \\ &\leq c_n (M + \tilde{H})(g)(r) \end{aligned}$$

Con ésto termina la estimación del primero de los términos de K^1 . La acotación del segundo término (y único que nos queda por acotar) sigue el mismo patrón, con la sola diferencia de que se utiliza la función *seno* en lugar de la función *coseno* , con el mismo factor y constante. Por tanto, para esta acotación necesitaremos las estimaciones del Lema 1.4 concernientes a la función R_k . ■

§3 PRUEBA DE LAS ACOTACIONES EXTREMALES

Ahora disponemos de las herramientas necesarias para probar el Teorema 2.1.

PRUEBA DEL TEOREMA 2.1:

Tomemos una función radial f . Por abuso de notación también utilizaremos f para referirnos a su proyección radial f_0 .

Para cada entero k definimos los intervalos $I_k = [2^k, 2^{k+1})$ y descomponemos el conjunto:

$$\{x : T^*f(x) > \lambda\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{x : |x| \in I_k, T^*f(x) > \lambda\}$$

Descomponemos también la función f para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$f = f\chi_{I_k^*} + f\chi_{(I_k^*)^c} = f_k^1 + f_k^2,$$

donde $I_k^* = (2^{k-1}, 2^{k+2})$. El Lema 2.4 nos da:

$$T^*f_k^1(x) \leq \frac{c_n}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(f_k^1(r)r^{\frac{n-1}{2}})(|x|)$$

Por otra parte, si $r \in I_k$ y $s \notin I_k^*$, entonces $|r-s| \sim r+s$. Esta observación junto con el apartado ii) del Lema 1.4 nos lleva a:

$$\begin{aligned} |K_R(r, s)| &= |RK_1(Rr, Rs)| \\ &= \sqrt{rs} \left| \frac{Rr J'_{\frac{n-2}{2}}(Rr) J_{\frac{n-2}{2}}(Rs) - Rs J_{\frac{n-2}{2}}(Rr) J'_{\frac{n-2}{2}}(Rs)}{r^2 - s^2} \right| \leq \frac{c_n}{r+s} \end{aligned}$$

Por tanto, si $|x| = r \in I_k$,

$$|S_R f_k^2(x)| \leq \frac{c}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{n-1}{2}} |f_k^2(s)|}{r+s} ds \leq \frac{c}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{n-1}{2}} |f(s)|}{|x|+s} ds.$$

Y entonces:

$$\begin{aligned} |\{x : T^*f(x) > \lambda\}| &\leq |\{x : \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{n-1}{2}} |f(s)|}{|x|+s} ds > c\lambda\}| \\ &\quad + \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\{x : |x| \in I_k, \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(f_k^1(r)r^{\frac{n-1}{2}})(|x|) > c\lambda\}| \\ &= I + II \end{aligned}$$

Para estimar II observamos que $|x| \in I_k$ implica $\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} < \frac{1}{2^k \frac{n-1}{2}}$ y aplicando la desigualdad de Chebychev para $1 < p < \infty$,

$$\begin{aligned} II &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda^p 2^{kp \frac{n-1}{2}}} \int_{I_k} |\mathcal{M}(f_k^1(r) r^{\frac{n-1}{2}})(s)|^p s^{n-1} ds \\ &\leq c_n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^{k(n-1)}}{\lambda^p 2^{kp \frac{n-1}{2}}} \int_{I_k} |\mathcal{M}(f_k^1(r) r^{\frac{n-1}{2}})(s)|^p ds \end{aligned}$$

El Lema 1.3 aplicado al peso $w(s) \equiv 1$ da entonces:

$$\begin{aligned} &\leq c_n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{2^{k(n-1)}}{\lambda^p 2^{kp \frac{n-1}{2}}} \int_{I_k^*} |f_k^1(s)|^p s^{p \frac{n-1}{2}} ds \\ &\leq c'_n \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\lambda^p 2^{kp \frac{n-1}{2}}} 2^{(k+2)p \frac{n-1}{2}} \int_{I_k^*} |f(s)|^p s^{n-1} ds \\ &\leq \frac{c''_n}{\lambda^p} \int_{\mathbb{R}} |f(s)|^p s^{n-1} ds = \frac{c'''_n}{\lambda^p} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^p \leq \frac{c}{\lambda^p} \|f\|_{L^{p,1}(\mathbb{R}^n)}^p \end{aligned}$$

Para estimar I hacemos uso del hecho de que $L^{p_0,1} \subset (L^{p_1,\infty})^*$ y $L^{p_0,\infty} = (L^{p_1,1})^*$ y separamos los casos en que $p = p_0$ ó $p = p_1$. Empecemos con la estimación para p_0 .

Observamos que $\frac{1}{|y|^{\frac{n-1}{2}}} \in L^{p_1,\infty}$; así que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{|f(s)|}{s + |x|} s^{\frac{n-1}{2}} ds \\ &\leq \frac{1}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} \int_0^\infty |f(s)| s^{-\frac{n-1}{2}} s^{n-1} ds \\ &\simeq \frac{1}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \frac{1}{|y|^{\frac{n-1}{2}}} dy \leq \frac{c}{|x|^{\frac{n+1}{2}}} \|f\|_{p_0,1} \end{aligned}$$

Para el exponente p_1 observamos a su vez que $\frac{1}{|y|^{\frac{n+1}{2}}} \in L^{p_0,\infty}$; con ello:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{|f(s)|}{|x| + s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \leq \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty |f(s)| s^{-\frac{n+1}{2}} s^{n-1} ds \\ &\simeq \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)| \frac{1}{|y|^{\frac{n+1}{2}}} dy \leq \frac{c}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \|f\|_{p_1,1} \end{aligned}$$

Uniendo estas dos estimaciones:

$$I = |\{x : \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{|f(s)|}{|x|+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds > c\lambda\}| \leq \frac{c_n}{\lambda^{p_i}} \|f\|_{p_i,1}^{p_i} \quad i = 0, 1.$$

Y queda de esta forma terminada la prueba del Teorema 2.1. ■

Observaciones

La prueba del Teorema 2.1 demuestra en realidad un resultado más fuerte, que es el siguiente:

TEOREMA 2.5.

T^* lleva $(L_{rad}^{p_0,\infty})^*$ en $L_{rad}^{p_1,\infty}$ y de igual forma, T^* lleva $(L_{rad}^{p_1,\infty})^*$ en $L_{rad}^{p_0,\infty}$.

La estimación del Lema 2.4 se puede utilizar para probar el Corolario 2.2 directamente. Esto es lo que hace E. Prestini en su artículo [P], en el que aparece una prueba mucho más elaborada de este lema. El resultado del Corolario 2.2 también ha sido obtenido independientemente por Y. Kanjin y aparece en la referencia [K].

§4 ACOTACIONES CON PESO DEL MULTIPLICADOR DEL DISCO PARA FUNCIONES RADIALES

En esta sección haremos una sencilla aplicación de las estimaciones del multiplicador del disco sobre funciones radiales que hemos venido obteniendo en apartados anteriores.

Sobre este operador T sabemos ya que está acotado de $L_{rad}^p(\mathbf{R}^n)$ en $L_{rad}^p(\mathbf{R}^n)$ cuando el exponente p pertenece al intervalo $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$ y según acabamos de probar en las secciones anteriores también se cumple en esos exponentes extremos una acotación, esta vez de tipo débil restringido.

El resultado que nos ocupa ahora es el siguiente:

TEOREMA 2.6.

Sean p un exponente $1 < p < \infty$ y $w(r)$ una función positiva tales que

$$w(r)r^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} \in A_p(\mathbf{R}^+)$$

Entonces

$$\int_{\mathbf{R}^n} |(Tf)(x)|^p w(|x|) dx \leq c \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p w(|x|) dx$$

para toda función $f \in L_{rad}^p(\mathbf{R}^n, w(|x|))$.

En este enunciado, $A_p(\mathbf{R}^+)$ denota la clase de pesos w de A_p que son simétricos, es decir: $w(x) = w(-x)$ y que por tanto podemos considerar como si estuvieran definidos solamente para valores positivos.

Obsérvese que para el caso $w(x) \equiv 1$ la condición del Teorema se reduce a $-1 < (n-1)(1-p/2) < p-1$, es decir, $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$. Para un peso potencia $w(r) = r^\alpha$ la condición para la acotación del operador T en $L_{rad}^p(\mathbf{R}^n, |x|^\alpha dx)$ es:

$$\frac{2(\alpha+n)}{n+1} < p < \frac{2(\alpha+n)}{n-1}$$

Es notable comprobar que para ciertos valores de α podamos salir del intervalo $(\frac{2n}{n+1}, \frac{2n}{n-1})$.

La prueba de este resultado es directa a partir del Lema 2.4.

PRUEBA:

Sea f radial con $f(x) = f_0(|x|)$, para simplificar la notación llamaremos también f a su proyección radial f_0 . Entonces \hat{f} es también radial:

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_0^\infty \frac{J_{\frac{n-2}{2}}(t|\xi|)f_0(t)}{(t|\xi|)^{\frac{n-2}{2}}} t^{n-1} dt$$

A su vez :

$$\begin{aligned} Tf(r) &= \frac{c_n}{r^{\frac{n-2}{2}}} \int_0^\infty s^{n/2} f_0(s) \int_0^1 J_{\frac{n-2}{2}}(ts) J_{\frac{n-2}{2}}(tr) t dt ds \\ &= \frac{c_n}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} f_0(s) K(r, s) ds \end{aligned}$$

donde

$$K(r, s) = \sqrt{rs} \int_0^1 J_{\frac{n-2}{2}}(ts) J_{\frac{n-2}{2}}(tr) t dt$$

El Lema 2.4 nos da la acotación:

$$|Tf(x)| \leq \frac{c_n}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(f_0(r) r^{\frac{n-1}{2}})(|x|)$$

siendo

$$\mathcal{M}g(t) = (M + \tilde{H} + H_a^t + \tilde{C})(g)(t).$$

f y Sf son funciones radiales, luego la acotación que cumple el operador S podemos escribirla como:

$$Sf(r) \leq \frac{c_n}{r^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(f(s) s^{\frac{n-1}{2}})(r).$$

En esta situación, la desigualdad que queremos probar es

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left| \frac{c_n}{r^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(s^{\frac{n-1}{2}} f(s))(r) \right|^p w(r) r^{n-1} dr \\ &\leq c \int_0^\infty |f(r)|^p w(r) r^{n-1} dr \end{aligned}$$

Recordemos ahora que el operador \mathcal{M} está acotado en $L^p(v)$ siempre que $v \in A_p(\mathbf{R})$ (ver Lema 1.2 de la introducción) y obtendremos que cuando

$$w(r) r^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} \in A_p(\mathbf{R}^+)$$

entonces

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left| \frac{c_n}{r^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(s^{\frac{n-1}{2}} f(s))(r) \right|^p w(r) r^{n-1} dr \\
&= \int_0^\infty c_n |\mathcal{M}(s^{\frac{n-1}{2}} f(s))(r)|^p w(r) r^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} dr \\
&\leq \int_0^\infty c_n |r^{\frac{n-1}{2}} f(r)|^p w(r) r^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} dr \\
&= c_n \int_0^\infty |f(r)|^p w(r) r^{n-1} dr
\end{aligned}$$

■

El Teorema 2.6 tiene un antecedente en el artículo [A] de K. Andersen, en donde se impone sobre los pesos radiales la condición más complicada (ver p. 270 del citado artículo)

$$\begin{aligned}
& \left(\int_a^b \frac{w(r) r^{n-1}}{(1+r)^{(n-1)p/2}} dr \right)^{1/p} \left(\int_a^b \frac{w(r)^{-p'/p} r^{n-1}}{(1+r)^{(n-1)p'/2}} dr \right)^{1/p} \\
&\leq K \int_a^b \left(\frac{r}{1+r} \right)^{n-1} dr
\end{aligned}$$

En el caso de pesos potencias la condición resulta ser equivalente en ambos casos.

Más aún, las estimaciones con pesos del Teorema 2.6 se extienden con nuestras técnicas de forma inmediata al operador maximal:

$$T^* f(x) = \sup_{R>0} |S_R f(x)|$$

Observamos que el operador \mathcal{M} que hemos utilizado para la demostración es invariante por dilataciones:

$$\mathcal{M}(f^R)(Rt) = \mathcal{M}f(t)$$

y que la acotación

$$Tf(x) \leq \frac{c_n}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(f_0(r) r^{\frac{n-1}{2}})(|x|)$$

es en realidad más fuerte:

$$T^* f(x) \leq \frac{c_n}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \mathcal{M}(f_0(r) r^{\frac{n-1}{2}})(|x|)$$

Entonces, hemos probado la siguiente acotación para el operador maximal:

TEOREMA 2.7.

Sean p un exponente $1 < p < \infty$ y $w(r)$ una función positiva tales que

$$w(r)r^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} \in A_p(\mathbf{R}^+)$$

Entonces

$$\int_{\mathbf{R}^n} |(T^* f)(x)|^p w(|x|) dx \leq c \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^p w(|x|) dx$$

para toda función $f \in L_{rad}^p(\mathbf{R}^n, w(|x|))$.

Este teorema, entre otras cosas, aplicado al peso $w \equiv 1$ nos proporciona el resultado de convergencia de las sumas parciales de la serie de Fourier para el caso de funciones radiales. Este es el resultado que ya obteníamos en el capítulo II y que se recogía en el Corolario 2.3.

§5 EXTENSION DE LAS ACOTACIONES CON PESOS PARA POLINOMIOS ARMÓNICOS

Los resultados que acabamos de probar para funciones radiales se pueden extender a funciones algo más generales, de la forma:

$$h(x) = f(|x|)P_k(x)$$

donde P_k es un polinomio armónico homogéneo de grado k . Este tipo de función no es demasiado restrictivo si tenemos en cuenta que en el desarrollo en armónicos esféricos de una función cada uno de los sumandos tiene esa forma (ver capítulo I sección 3). El resultado es el siguiente:

TEOREMA 2.8.

Sea p un exponente $1 < p < \infty$, $w(r)$ una función positiva y $P_k(x)$ un polinomio armónico homogéneo de grado k en \mathbb{R}^n . Si

$$w(r)r^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} \in A_p(\mathbb{R}^+)$$

entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(fP_k)(x)|^p w(|x|) dx \leq c \int_{\mathbb{R}^n} |f(|x|)P_k(x)|^p w(|x|) dx$$

para toda función f radial tal que $f(|x|)P_k(x) \in L^p(\mathbb{R}^n, w(|x|))$.

PRUEBA:

Tomemos una función radial f y un polinomio armónico homogéneo de grado k , P_k . En su producto nos interesa separar la parte que depende del módulo de x y la que depende de $\frac{x}{|x|}$, es decir, la parte radial y la angular. Para separarlas utilizamos que siendo P_k homogéneo de grado k podemos escribirlo como:

$$P_k(x) = |x|^k P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

De esta forma tenemos

$$f(|x|)P_k(x) = f(|x|)|x|^k P_k\left(\frac{x}{|x|}\right) = g(|x|)P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

donde hemos llamado $g(|x|) = f(|x|)|x|^k$.

Aplicamos ahora la expresión obtenida en el capítulo I sección 3 para el operador multiplicador del disco. En este caso estamos considerando una descomposición en armónicos esféricos que consta de un único sumando:

$$T(fP_k)(x) \leq \frac{c_n}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2}} g(s) (|x|s)^{\frac{1}{2}} \int_0^1 J_{\frac{n-2}{2}+k}(t|x|) J_{\frac{n-2}{2}+k}(ts) t dt ds P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

El Lema 2.4 nos da entonces:

$$|T(gP_k)(x)| \leq \frac{c_n}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} |P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)| \mathcal{M}(g(s)s^{\frac{n-1}{2}})(|x|)$$

donde \mathcal{M} es el operador maximal que aparece en las secciones anteriores.

Con esta expresión calculamos la norma $L^p(w)$.

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |T(fP_k)(x)|^p w(|x|) dx \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{c_n}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} P_k\left(\frac{x}{|x|}\right) \mathcal{M}(g(s)s^{\frac{n-1}{2}})(|x|) \right|^p w(|x|) dx \\ & = \int_{S^{n-1}} |P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)|^p d\sigma_n \int_0^\infty |\mathcal{M}(g(s)s^{\frac{n-1}{2}})(r)|^p \frac{w(r)}{r^{\frac{n-1}{2}p}} r^{n-1} dr \end{aligned}$$

Esta última expresión podemos acotarla si la función $w(r)r^{(n-1)(1-\frac{p}{2})}$ es un peso de $A_p(\mathbb{R}^+)$, tal como lo hicimos en la sección anterior. Llegamos a que:

$$\begin{aligned} & \leq C \int_{S^{n-1}} |P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)|^p d\sigma_n \int_0^\infty |g(r)r^{\frac{n-1}{2}}|^p \frac{w(r)}{r^{\frac{n-1}{2}p}} r^{n-1} dr \\ & = C \int_{S^{n-1}} |P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)|^p d\sigma_n \int_0^\infty |g(r)|^p w(r) r^{n-1} dr \\ & = C \int_{\mathbb{R}^n} |g(|x|) P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)|^p w(|x|) dx \end{aligned}$$

Por último, hacemos aparecer de nuevo f .

$$\begin{aligned} & = C \int_{\mathbb{R}^n} |f(|x|)|^p |P_k\left(\frac{x}{|x|}\right)|^p w(|x|) dx \\ & = C \int_{\mathbb{R}^n} |f(|x|) P_k(x)|^p w(|x|) dx \end{aligned}$$

Esto termina la demostración. ■

Observemos que al igual que sucedía en la sección anterior, la prueba de este teorema es válida igualmente para el operador maximal T^* , puesto que las acotaciones que hemos empleado lo son.

Hemos probado entonces:

TEOREMA 2.9.

Sean $1 < p < \infty$ y $P_k(s)$ un polinomio armónico homogéneo de grado k en \mathbf{R}^n , si

$$w(r)r^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} \in A_p(\mathbf{R}^n)$$

entonces

$$\int_{\mathbf{R}^n} |T^*(fP_k)(x)|^p w(|x|) dx \leq C \int_{\mathbf{R}^n} |f(|x|)P_k(x)|^p w(|x|) dx$$

Para toda f radial tal que $f(|x|)P_k(x) \in L^p(\mathbf{R}^n, w(|x|))$.

Esta acotación del operador maximal aplicándola al peso $w \equiv 1$ nos permitiría enunciar un resultado de convergencia de las sumas parciales de la serie de Fourier para el caso de funciones como las que aparecen aquí.

En todos estos resultados las hipótesis que hemos pedido cumplir al peso w no dependen del grado de homogeneidad del polinomio que tomemos. De esta manera se extienden automáticamente a funciones que sean sumas finitas de funciones como las que hemos considerado, es decir, funciones que se puedan expresar:

$$f(x) = \sum_{k \in K} f_k(|x|)P_k(x)$$

donde K es un conjunto de índices finito, $k \in \mathbf{N}$.

K. Andersen, en su artículo [A] prueba que el operador T está acotado en $L^p(w)$ cuando las funciones sobre las que actúa son un producto de una función radial y un polinomio armónico homogéneo. En su resultado, la condición que se pide al peso involucra también al grado de homogeneidad del polinomio en cuestión.

CAPITULO III

PESOS RADIALES Y DESIGUALDADES EN NORMA MIXTA PARA EL MULTIPLICADOR DEL DISCO

§1 Teorema Principal	55
§2 Primeras consecuencias del Teorema	57
§3 Reducción y primera parte de la prueba	63
§4 Acotaciones derivadas de la primera parte de la prueba	67
§5 Segunda parte de la prueba	72

CAPITULO III

PESOS RADIALES Y DESIGUALDADES EN NORMA MIXTA PARA EL MULTIPLICADOR DEL DISCO

§1 TEOREMA PRINCIPAL

Una clásica acotación con peso del operador T que se debe a Hirschman [Hi] demuestra que está acotado en los espacios $L^2(\mathbf{R}^n)$ respecto de los pesos de la forma $|x|^{-\gamma}$ para $-1 < \gamma < 1$, es decir, existen unas constantes finitas C_γ tales que:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf(x)|^2 \frac{dx}{|x|^\gamma} \leq C_\gamma \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 \frac{dx}{|x|^\gamma}$$

Obsérvese que si $w(x) = |x|^{-\gamma}$, $0 \leq \gamma < 1$, entonces $w \in A_1(\mathbf{R})$. Sin embargo, los pesos radiales de T actuando sobre funciones arbitrarias tienen una estructura más complicada que los pesos A_p de Mockenhaupt. De hecho, no es cierto en general, como se conjeturó en [A], que si w es un peso arbitrario de $A_1(\mathbf{R})$ entonces se tenga la acotación de T sobre el espacio $L^2(\mathbf{R}^n, w(|x|)dx)$ (la acotación sobre $L^2(\mathbf{R}^n, w^{-1}(|x|)dx)$ vendría por dualidad). Más adelante volveremos a tratar sobre este asunto.

E. Stein [S2] propuso durante la conferencia sobre Análisis Armónico celebrada en Williamstown en 1978 el problema de caracterizar el operador natural que controlara las desigualdades con peso del operador multiplicador del disco. Se trata de buscar el operador que asocie a un peso, w , otro, W , de tal forma que se cumpla la desigualdad:

$$\int |Tf(x)|^2 w(x) dx \leq c \int |f(x)|^2 W(x) dx$$

para las funciones $f \in L^2(\mathbf{R}^n, W(x)dx)$ con una constante c independiente de f .

A la vista de los trabajos de C. Fefferman [F2] y A. Córdoba [C1] relacionando la función maximal de Kakeya con las acotaciones de los operadores de Bochner-Riesz parecía razonable pensar que ese tipo de operador que asociara $W(x)$ a $w(x)$ estuviera dado por un operador maximal definido mediante medias calculadas sobre todas las direcciones posibles. Esta sería una forma de llevar al límite el caso de la función maximal de Kakeya.

En este capítulo presentamos una solución a este problema en el caso de pesos radiales. Para enunciar el resultado necesitamos definir el operador que lo protagoniza. Llamaremos función maximal universal y denotaremos por \mathcal{K} al operador:

$$\mathcal{K}f(x) = \sup_{x \in R \in \mathcal{R}_n} \frac{1}{|R|} \int_R |f(y)| dy$$

donde \mathcal{R}_n es el conjunto de todos los rectángulos (paralelepípedos) en \mathbb{R}^n .

Utilizaremos una variante de este operador, obtenida mediante una potencia:

$$\mathcal{K}_\alpha f(x) = (\mathcal{K}(|f(x)|^\alpha))^{1/\alpha}$$

para $\alpha > 1$.

La presencia de esta modificación de \mathcal{K} por el parámetro α es de naturaleza técnica y no podemos eludirla. Para convencernos de ello basta recordar que en dimensión $n = 1$, T es esencialmente la Transformada de Hilbert, H , mientras que \mathcal{K} no es otro sino el Operador Maximal de Hardy-Littlewood, y que la desigualdad:

$$\int_{\mathbb{R}} |Hf|^p w \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}} |f|^p (Mw^\alpha)^{1/\alpha} \quad 1 < p < \infty$$

(probada por A. Córdoba y C. Fefferman en [CoF]) es cierta para pesos arbitrarios w sólo si $\alpha > 1$.

TEOREMA 3.1.

Dado $\alpha > 1$ existe una constante C_α tal que para cada peso radial w se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf(x)|^2 w(x) dx \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \mathcal{K}_\alpha w(x) dx$$

para toda $f \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathcal{K}_\alpha w(x) dx)$.

§2 PRIMERAS CONSECUENCIAS DEL TEOREMA

Como es bien sabido, (ver [dG1]) el operador \mathcal{K} no está acotado en ninguno de los espacios $L^p(\mathbf{R}^n)$ (aparte de $p = \infty$) si $n > 1$. Esto está en consonancia con la estimación con pesos dobles propuesta por Stein, pues si \mathcal{K} estuviera acotado en algún $L^p(\mathbf{R}^n)$, $p < \infty$, y el problema fuese cierto en general entonces T estaría acotado en algún espacio $L^q(\mathbf{R}^n)$ con $q \neq 2$, cosa que sabemos es falsa por el teorema de Fefferman [F]. La situación es totalmente distinta en el caso de pesos radiales: en el artículo [CHS], A. Carbery, E. Hernández y F. Soria han descrito para w radial el comportamiento de $\mathcal{K}w$ en términos de operadores unidimensionales que actúan sobre la proyección radial de w , w_0 .

Dada una función g apropiada definida en $(0, \infty)$ los operadores que nos dan la descripción buscada son:

$$\begin{aligned} M_{\rightarrow}g(r) &= \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_r^{r+h} |g(t)| dt, \quad r > 0 \\ M_{\leftarrow}g(r) &= \sup_{h>0} \frac{1}{h} \int_{r-h}^r |g(t)| dt, \quad r > 0 \\ Ag(r) &= \sup_{0 \leq a < r} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \int_a^r |g(t)| \frac{t}{(t^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} dt, \quad r > 0 \end{aligned}$$

El Lema 1 de la referencia [CHS] prueba que:

LEMA 3.2.

Sea g una función radial definida en \mathbf{R}^n y sea g_0 su proyección radial, entonces:

$$\mathcal{K}g(x) \sim M_{\rightarrow}g_0(|x|) + M_{\leftarrow}g_0(|x|) + Ag_0(|x|)$$

Observando que si $r \geq t \geq a \geq 0$ entonces:

$$2 \frac{1}{(r^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \frac{t}{(t^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{1}{r - a}$$

obtenemos:

$$2Ag(r) \geq \sup_{0 \leq a < r} \frac{1}{r - a} \int_a^r |g(t)| dt = M_{\leftarrow}g(r)$$

lo cual simplifica el lema anterior transformándolo en:

$$\mathcal{K}g(x) \sim M_{\rightarrow}g_0(|x|) + Ag_0(|x|)$$

Otros resultados que englobamos en el siguiente lema aparecen también en la referencia [CHS] (lemas 2 y 3).

LEMA 3.3.

M_{\rightarrow} y A son dos operadores acotados de $L^{p,1}((0, \infty), r^{p-1}dr)$ en $L^{p,\infty}((0, \infty), r^{p-1}dr)$ para $p \geq 2$. En particular la función maximal universal, \mathcal{K} , es de tipo débil restringido p cuando actúa sobre funciones radiales de \mathbb{R}^n , $n \geq 2$.

Obtenemos un conocimiento más preciso sobre cómo es el operador \mathcal{K} cuando las funciones sobre las que actúa son monótonas. Si $|g|$ es no creciente entonces

$$Ag(r) = \frac{1}{r} \int_0^r |g(t)| dt$$

En efecto, tomemos un a fijo, $a < r$, y elijamos un $\varepsilon > 0$ arbitrario pero suficientemente pequeño para que $\tilde{a} = (a^2 + \varepsilon^2)^{1/2} < r$. Bastará probar que:

$$\begin{aligned} H_{\varepsilon}(a) &= \frac{1}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_{\tilde{a}}^r |g(t)| \frac{t dt}{(t^2 - a^2)^{1/2}} \\ &\leq H_{\varepsilon}(0) = \frac{1}{r} \int_{\varepsilon}^r |g(t)| dt \leq \frac{1}{r} \int_0^r |g(t)| dt \end{aligned}$$

pues evidentemente $\sup_{0 \leq a < r} \sup_{\varepsilon > 0} H_{\varepsilon}(a) = Ag(r)$. Solamente hay que demostrar la primera desigualdad, cosa que haremos si vemos que $H_{\varepsilon}(a)$ como función de a es decreciente cuando $|g(t)|$ como función de t es decreciente:

$$\begin{aligned} H'_{\varepsilon}(a) &= \frac{a}{(r^2 - a^2)^{3/2}} \int_{\tilde{a}}^r \frac{|g(t)| t dt}{(t^2 - a^2)^{1/2}} - \frac{a|g(\tilde{a})|}{\varepsilon(r^2 - a^2)^{1/2}} + \frac{a}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_{\tilde{a}}^r \frac{|g(t)| t dt}{(t^2 - a^2)^{3/2}} \\ &\leq \frac{a|g(\tilde{a})|}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \left\{ \frac{[(t^2 - a^2)^{1/2}]_{\tilde{a}}^r}{r^2 - a^2} - \frac{1}{\varepsilon} - [(t^2 - a^2)^{-1/2}]_{\tilde{a}}^r \right\} \\ &\leq -\frac{a\varepsilon|g(\tilde{a})|}{(r^2 - a^2)^{1/2}} < 0 \end{aligned}$$

Esto nos dice que el supremo se alcanza para $a = 0$. Traduciéndolo en términos de \mathcal{K} obtenemos que si $w \geq 0$ es radial y no creciente entonces:

$$\mathcal{K}w(x) \sim \frac{1}{|x|} \int_0^{|x|} w_0(t) dt$$

Para funciones $|g|$ no decrecientes se tiene $Ag(r) = g(r)$, por tanto, si $w \geq 0$ es radial y no decreciente tenemos:

$$\mathcal{K}w(x) \sim M_{\rightarrow w_0}(|x|)$$

Utilizando estos argumentos y la propiedad $M(u)(x) \leq cu(x)$ que cumplen los pesos $u \in A_1$ se obtiene:

COROLARIO 3.4.

Sea $v : \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$ par y monótona en $(0, \infty)$. Entonces, si $v \in A_1(\mathbf{R})$ ó $v^{-1} \in A_1(\mathbf{R})$ existe una constante c tal que:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf(x)|^2 v(|x|) dx \leq c \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 v(|x|) dx$$

Este resultado no es cierto para pesos $v \in A_1(\mathbf{R})$ arbitrarios, cosa que se conjeturó en [A]. José Luis Rubio de Francia [R] y de forma independiente G. Mockenhaupt [Mo] anunciaron ya ese hecho.

Los contraejemplos básicos vienen dados por las funciones

$$v_\delta(t) = \frac{1}{|1 - |t||^\delta}$$

que cumplen el corolario solamente para el rango $-\frac{1}{2} < \delta < \frac{1}{2}$ mientras que $v_\delta \in A_1$ para $0 \leq \delta < 1$.

También observamos que para $\delta \geq \frac{1}{2}$ se tiene

$$A(v_\delta \chi_{(1,2)})(t) = +\infty \quad \forall t > 1$$

y sin embargo $v_\delta \chi_{(1,2)} \in L^{p,1}((0, \infty), r^{p-1} dr)$ para $p < 2$. Es decir, el Lema 3.3 no podemos extenderlo a $p < 2$ para el operador A . Tampoco se puede extender la estimación de tipo débil restringido p que se obtiene para \mathcal{K} a una estimación de tipo débil p para $1 < p < \infty$, según nos muestra la función

$$g(t) = \frac{1}{t(1 + \log \frac{1}{t})} \chi_{(0,1)}(t).$$

El operador M_{\rightarrow} es un poco mejor que A :

LEMA 3.5.

M_{\leftarrow} está acotado de $L^1(r^{p-1}dr)$ en $L^{1,\infty}(r^{p-1}dr)$ $\forall p \geq 1$.

PRUEBA:

M_{\leftarrow} es un operador de tipo débil $(1, 1)$, es decir, está acotado entre $L^1(u(r)dr)$ y $L^{1,\infty}(v(r)dr)$ si y sólo si es de tipo débil $(1, 1)$ respecto a ese par de pesos (u, v) sobre sumas finitas de δ de Dirac. La prueba podemos encontrarla en [Me]. También allí encontramos la prueba de que para sumas finitas de δ de Dirac esa acotación de tipo débil $(1, 1)$ respecto al par de pesos (u, v) es equivalente a la acotación

$$M_{\leftarrow}v \leq cu$$

donde aparece el operador maximal unidireccional adjunto. El resultado original se debe a F.J. Martín-Reyes, P. Ortega y A. de la Torre [MOT].

La acotación que se necesita para este lema es para dos pesos iguales: $u(r) = v(r) = r^{p-1}$, y bastará probar que

$$M_{\leftarrow}(r^{p-1}) \leq cr^{p-1}$$

Esto por su parte es inmediato si observamos que

$$M_{\leftarrow}(r^{p-1}) = \sup_{h>0} \frac{r^p - (r-h)^p}{hp}$$

El teorema del valor medio aplicado a la función $f(x) = x^p$ asegura la existencia de un $t \in (r-h, r)$ para el que

$$\frac{r^p - (r-h)^p}{h} = pt^{p-1}$$

El supremo del segundo miembro se alcanza en el extremo superior del intervalo, en r , porque el exponente es $p \geq 1$, de tal manera que

$$M_{\leftarrow}(r^{p-1}) = r^{p-1}$$

■

Según comprobamos con la demostración de este lema, el mismo resultado es cierto para cualquier peso creciente en lugar de r^{p-1} .

El Lema 3.3 junto con el Teorema 3.1 nos dan la siguiente acotación en norma mixta del multiplicador del disco.

COROLARIO 3.6.

Sean (r, w) las coordenadas polares en \mathbf{R}^n y dw la medida sobre la esfera unidad S^{n-1} , entonces existe una constante $C_{p,n}$ tal que

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} |Tf(r, w)|^2 dw \right)^{\frac{p}{2}} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{p}} \\ & \leq C_{p,n} \left(\int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} |f(r, w)|^2 dw \right)^{\frac{p}{2}} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$.

Este resultado fue probado de forma independiente por A. Córdoba en [C2] y por G. Mockenhaupt en [Mo]. Nuestra demostración, al igual que las desigualdades vectoriales de secciones posteriores, se basará en una sencilla aplicación de cierta desigualdad con pesos dobles, en este caso la del Teorema 3.1.

PRUEBA:

Identificamos el primer miembro de la desigualdad con una norma, denotándolo por $\|Tf\|_{L_{rad}^p L_{ang}^2(\mathbf{R}^n)}^2$.

$L_{rad}^p L_{ang}^2(\mathbf{R}^n)$ es el espacio de las funciones de \mathbf{R}^n en \mathbf{R}^n cuya parte angular está en L^2 y cuya parte radial está en L^p . Podemos expresar ésto de la forma:

$$\begin{aligned} L_{rad}^p L_{ang}^2(\mathbf{R}^n) &= \{ \text{funciones } f \text{ tales que} \\ & \left(\int_0^\infty \left| \int_{S^{n-1}} |f(r, \theta)|^2 d\sigma(\theta) \right|^{\frac{p}{2}} r^{n-1} dr \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \} \end{aligned}$$

Para los exponentes $2 < p < \frac{2n}{n-1}$ podemos expresar por el Teorema de Representación de Riesz ese primer miembro como:

$$\|Tf\|_{L_{rad}^p L_{ang}^2(\mathbf{R}^n)}^2 = \sup \int_{\mathbf{R}^n} |Tf(x)|^2 w_0(|x|) dx$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones $w_0 \in L^{(\frac{p}{2})'}(r^{n-1} dr)$ de norma 1. El Teorema 3.1 nos da entonces, si $w(x) = w_0(|x|)$:

$$\|Tf\|_{L_{rad}^p L_{ang}^2(\mathbf{R}^n)}^2 \leq C_\alpha \sup \int_{\mathbf{R}^n} |f(x)|^2 \mathcal{K}_\alpha w(x) dx$$

para $\alpha > 1$, y el Lema 3.3 nos proporciona la estimación que resta: \mathcal{K} está acotado de $L_{rad}^{n,1}(\mathbb{R}^n)$ en $L_{rad}^{n,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $n > 2$, entonces \mathcal{K}_α está acotado de $L_{rad}^{n\alpha,1}(\mathbb{R}^n)$ en $L_{rad}^{n\alpha,\infty}(\mathbb{R}^n)$ y habrá acotación de tipo fuerte en $L_{rad}^{(\frac{n}{2})'}(\mathbb{R}^n)$ cuando $\alpha n < (\frac{n}{2})'$, utilizando la interpolación. Utilizando la desigualdad de Hölder se llega a:

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L_{rad}^p L_{ang}^2(\mathbb{R}^n)}^2 &\leq C'_\alpha \sup(\int_{S^{n-1}} |f(r, \theta)|^2 d\sigma(\theta))^{p/2} r^{n-1} dr)^{2/p} \|\mathcal{K}_\alpha w\|_{L^{(p/2)'}(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq C'_\alpha \|f\|_{L_{rad}^p L_{ang}^2}^2 \end{aligned}$$

La parte correspondiente a $\frac{2n}{n+1} < p < 2$ se obtiene por dualidad ya que el operador T es autoadjunto en el espacio L^2 (sin peso) y el caso $p = 2$ es trivial. ■

§3 REDUCCION Y PRIMERA PARTE DE LA PRUEBA

Para enfrentarnos con la prueba del Teorema 3.1 vamos a utilizar la expresión del operador T que calculamos en la sección 3 del capítulo I.

$$Tf(x) = \sum_{k,j} \frac{c_n(-1)^k}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} T_{\frac{n-2}{2}+k}(f_{k,j}(s)s^{\frac{n-1}{2}})(|x|) \mathcal{Y}_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

donde $f \sim \sum_{k,j} f_{k,j}(r) \mathcal{Y}_{k,j}(\theta)$ es la descomposición en armónicos de f y

$$T_l g(r) = \int_0^\infty g(s) \{(rs)^{1/2} \int_0^1 J_l(rt) J_l(st) t dt\} ds$$

La expresión entre llaves es lo que llamamos el "núcleo" de T_l y lo denotaremos por $K_l(r, s)$.

La norma en $L^2(w)$ del operador T calculada en polares es:

$$\|Tf\|_{L^2(w)}^2 = \sum_{k,j} \int_0^\infty |T_{\frac{n-2}{2}+k}(f_{k,j}(s)s^{\frac{n-1}{2}})(r)|^2 w_0(r) dr$$

donde w_0 es la proyección radial del peso w . De la misma manera:

$$\|f\|_{L^2(\mathcal{K}_\alpha w)}^2 = \sum_{k,j} \int_0^\infty |f_{k,j}(r)|^2 \mathcal{K}_\alpha w_0(r) r^{n-1} dr$$

donde para simplificar notación hemos escrito $\mathcal{K}_\alpha w_0(r)$ por $\mathcal{K}_\alpha w(r, 0, \dots, 0)$.

Así la desigualdad que queremos probar en el Teorema 3.1 equivale a:

$$\int_0^\infty |T_l g(r)|^2 w_0(r) dr \leq C_\alpha \int_0^\infty |g(r)|^2 \mathcal{K}_\alpha w_0(r) dr$$

con una constante C_α que depende solamente de $\alpha > 1$, independiente por tanto de g , w_0 y l . Esta es la expresión que probaremos.

Para el núcleo del operador T_l se utiliza la descomposición de la sección 3 del capítulo I, que ya hemos empleado en el capítulo II.

Simplificaremos la notación si utilizamos las funciones

$$\begin{aligned}\mu_l(r) &= r^{1/2} J_l(r) \\ \sigma_l(r) &= r^{1/2} J'_l(r)\end{aligned}\quad r > 0$$

La expresión del núcleo queda:

$$\begin{aligned}K_l(r, s) &= \sqrt{rs} \int_0^1 J_l(tr) J_l(ts) t dt \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sigma_l(s) \mu_l(r)}{r-s} - \frac{\mu_l(s) \sigma_l(r)}{r-s} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\sigma_l(s) \mu_l(r)}{r+s} - \frac{\mu_l(s) \sigma_l(r)}{r+s} \right\} \\ &= \sum_{i=1}^4 K_l^i(r, s)\end{aligned}$$

La desigualdad que queremos probar se deduce entonces de las cuatro estimaciones siguientes:

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty K_l^i(r, s) g(s) ds \right|^2 w_0(r) dr \leq C_\alpha \int_0^\infty |g(r)|^2 \mathcal{K}_\alpha w_0(r) dr$$

con $i = 1, 2, 3, 4$.

Es fácil ver que las desigualdades para $i = 1, 3$ se obtienen de (de hecho son equivalentes a) la siguiente desigualdad para la transformada de Hilbert:

$$(1) \quad \int_{\mathbf{R}} \sigma_k^2 |H(G\mu_k)|^2 w_0 \leq C_\alpha \int_{\mathbf{R}} |G|^2 \mathcal{K}_\alpha w_0$$

mientras que las desigualdades para $i = 2, 4$ se deducen de:

$$(2) \quad \int_{\mathbf{R}} \mu_k^2 |H(G\sigma_k)|^2 w_0 \leq C_\alpha \int_{\mathbf{R}} |G|^2 \mathcal{K}_\alpha w_0$$

donde las funciones σ_k , μ_k , w_0 y $\mathcal{K}_\alpha w_0$ están extendidas como funciones pares a la recta \mathbf{R} y G es una función arbitraria definida en \mathbf{R} . Para ver esto, basta con tomar las funciones $G_1(r) = g(r)$ si $r > 0$, $G_1(r) = 0$ si $r \leq 0$ y $G_2(r) = 0$ para $r \geq 0$, $G_2(r) = g(-r)$ para $r < 0$ sucesivamente en (1) y (2) y obtener así las cuatro desigualdades anteriores. El presentar las desigualdades de esta forma tiene por objeto aprovechar las propiedades de acotación conocidas de la transformada de Hilbert.

Estas dos desigualdades, dado que μ_k y σ_k son funciones acotadas, se cumplen incluso cambiando \mathcal{K} por el operador maximal de Hardy-Littlewood, M , aunque la constante en ese caso dependería de k . No nos sirve pues para acotar globalmente el operador T pero sí para eliminar un número finito de términos o para suponer, sin pérdida de generalidad, que k es suficientemente grande.

La desigualdad (1) es más sencilla que la (2), incluso podemos probar algo más fuerte:

LEMA 3.7.

Para todo $p > \frac{4}{3}$ y todo $v \in A_{3p/4}$ tenemos:

$$\int_{\mathbb{R}} |H(G\mu_k)\sigma_k|^p v \leq C_{p,v} \int_{\mathbb{R}} |G|^p v$$

Este lema, aplicado al peso $v = M_\alpha w_0$, $\alpha > 1$ y siempre que $M_\alpha w_0 < \infty$ en casi todo punto nos da:

$$\int_{\mathbb{R}} |H(G\mu_k)\sigma_k|^p w_0 \leq C_{p,\alpha} \int_{\mathbb{R}} |G|^p M_\alpha w_0$$

para exponentes $p > \frac{4}{3}$, que es la desigualdad (1) con el operador \mathcal{K} sustituido por otro más pequeño, el operador de Hardy-Littlewood.

PRUEBA:

Con la notación del capítulo I sección 4 podemos acotar

$$|\sigma_k|^p \leq C\tau_k^{-p}$$

Si $\tau_k^{-p}v$ fuera un peso de A_p para $p > \frac{4}{3}$ tendríamos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |H(G\mu_k)\sigma_k|^p v &\leq C \int_{\mathbb{R}} |H(G\mu_k)|^p \tau_k^{-p} v \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}} |G|^p |\mu_k|^p \tau_k^{-p} v \end{aligned}$$

Y el lema quedaría probado con recordar (también del capítulo I) que:

$$|\mu_k|^p \tau_k^{-p} \leq C$$

Hemos reducido pues el problema a probar que $\tau_k^{-p}v \in A_p$ con $p > \frac{4}{3}$.

La desigualdad de Hölder al revés nos asegura que si un peso $v \in A_{3p/4}$ entonces existe un $q < \frac{3p}{4}$ tal que $v \in A_q$ (ver [GR]).

Tomemos un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Aplicamos la desigualdad de Hölder para aprovechar que $v \in A_q$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{|I|} \int_I \tau_k^{-p} v \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\tau_k^{-p} v)^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \\ & \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I \tau_k^{-p} v \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I v^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} \left(\frac{1}{|I|} \int_I \tau_k^{\frac{p}{p-q}} \right)^{p-q} = \Delta \end{aligned}$$

Observando que $\tau_k^\gamma \in A_1$ uniformemente en k siempre que $\gamma < 4$, según se prueba en el Lema 1.6 y que por hipótesis $q < \frac{3p}{4}$, con lo que $\frac{p}{p-q} < 4$, podemos controlar el último término por:

$$\left(\frac{1}{|I|} \int_I \tau_k^{\frac{p}{p-q}} \right)^{p-q} \leq C \inf_I (\tau_k^p)$$

Si introducimos ésto en la primera integral llegamos a:

$$\Delta \leq C \left(\frac{1}{|I|} \int_I (\tau_k^{-p} \inf_I \tau_k^p) v \right) \left(\frac{1}{|I|} \int_I v^{-\frac{1}{q-1}} \right)^{q-1} \leq C'$$

por estar v en A_q . Esto es lo que necesitábamos. ■

Este lema constituye una demostración sencilla del paso principal utilizado en la demostración del Teorema 2 en [BC2]. A su vez ofrece una extensión con peso de ese resultado en donde se considera solamente el caso $v \equiv 1$.

El resultado análogo al del Lema 3.7 cambiando los papeles de σ_k y μ_k no es cierto con constante independiente de k .

§4 ACOTACIONES DERIVADAS DE LA PRIMERA PARTE DE LA PRUEBA

Como consecuencia del Lema 3.7 podemos probar la siguiente desigualdad vectorial.

COROLARIO 3.8.

Para $p > 4/3$ existe una constante $C = C_p$ tal que para una sucesión de funciones $\{g_j\}_j \in L^p_{12}$ y para toda colección de números positivos $\{l_j\}_j$ se tiene:

$$\|(\sum_j |H(\mu_{l_j}, g_j) \sigma_{l_j}|^2)^{1/2}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C_p \|(\sum_j |g_j|^2)^{1/2}\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

Recordemos que para $0 < p, q \leq \infty$ el espacio L^p_{1q} representa la colección de sucesiones de funciones medibles $\{f_k\}_k$ tales que:

$$\|\{f_k\}_k\|_{L^p_{1q}} =: (\int (\sum_k |f_k|^q)^{p/q})^{1/p} < \infty$$

Los casos $p = \infty$ ó $q = \infty$, y en general la definición de los espacios $L^{p,r}_{1q}$ para $0 < p, q, r \leq \infty$ se puede hacer directamente escribiendo

$$\|\{f_k\}_k\|_{L^{p,r}_{1q}} =: \| \|\{f_k\}_k\|_{l^q} \|_{L^{p,r}}$$

El Corolario 3.8 nos dice entonces que el operador que asocia a una sucesión $\{g_j\}_j$ la nueva sucesión $\{H(\mu_{l_j}, g_j) \sigma_{l_j}\}_j$ está acotado sobre el espacio $L^p_{12}(\mathbb{R})$ siempre que $p > 4/3$. En capítulos sucesivos extenderemos este resultado a los espacios $L^p_{1q}(\mathbb{R})$, $p, q > 4/3$ (Teorema 4.1) así como a la acotación de tipo débil $L^{4/3,1}_{12}(\mathbb{R}) \rightarrow L^{4/3,\infty}_{12}(\mathbb{R})$ (ver la demostración del Teorema 5.1, Lema 5.4).

El caso que ahora consideramos ($L^p_{12}(\mathbb{R})$) representa el resultado básico de A. Córdoba en [C2] previo a la demostración de la estimación en norma mixta que presentamos en el Corolario 3.6. Como en aquella ocasión, la prueba en nuestro caso se deduce de una desigualdad con pesos dobles.

PRUEBA:

Para $\frac{4}{3} < q < \min\{2, p\}$ podemos expresar la norma en L^p como una norma en el espacio $L^{p/q}_{12/q}$:

$$\|(\sum_j |H(\mu_{l_j}, g_j) \sigma_{l_j}|^2)^{1/2}\|_{L^p(\mathbb{R})}^q = \| \{ |H(\mu_{l_j}, g_j) \sigma_{l_j}|^q \}_j \|_{L^{p/q}_{12/q}(\mathbb{R})}$$

Por el Teorema de Representación de Riesz sabemos que existe una sucesión de funciones $\{w_j\}_j \in L_{l(2/q)'}^{(p/q)'}(\mathbf{R})$ de norma 1 tal que la anterior expresión es igual a:

$$= \sum_j \int |H(\mu_{l_j} g_j) \sigma_{l_j}|^q w_j$$

Utilizando ahora la observación que sigue al Lema 3.7 para el peso $M_\alpha w_0$ acotamos ésto por:

$$\leq C \sum_j \int |g_j|^q M_\alpha w_j$$

con $\alpha > 1$ que elegiremos adecuadamente.

Por último utilizaremos la Desigualdad de Fefferman-Stein [FS]:

$$\|\{Mf_j\}_j\|_{L_{l,r}^s} = \left(\int \left(\sum_j |Mf_j|^r \right)^{s/r} \right)^{1/s} \leq C_{r,s} \|\{f_j\}_j\|_{L_{l,r}^s}$$

válida para $1 < r, s < \infty$.

En nuestro caso, antes de poder utilizarla hemos de preparar el camino, aplicando en primer lugar la desigualdad de Hölder para sucesiones y a continuación para integrales. Para simplificar notación llamaremos $a = \frac{2}{q}$ y $b = \frac{p}{q}$.

$$\begin{aligned} \sum_j \int |g_j|^q M_\alpha w_j &= \int \sum_j |g_j|^q M_\alpha w_j \\ &\leq \int \left(\sum_j |g_j|^2 \right)^{1/a} \left(\sum_j |M_\alpha w_j|^{a'} \right)^{1/a'} \\ &\leq \left(\int \left(\sum_j |g_j|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/b} \left(\int \left(\sum_j |M_\alpha w_j|^{a'} \right)^{b'/a'} \right)^{1/b'} \\ &= \|\{g_j\}_j\|_{L_{l^2}^q}^q \left(\int \left(\sum_j |Mw_j^\alpha|^{a'/\alpha} \right)^{\frac{a'}{a'} \frac{b'}{\alpha}} \right)^{\frac{a'}{b'} \frac{1}{\alpha}} \end{aligned}$$

Si $1 < \alpha < \min\{a', b'\} = \min\{(\frac{2}{q})', (\frac{p}{q})'\}$ entonces podemos aplicar la desigualdad de Fefferman-Stein, concluyendo que:

$$\begin{aligned} \left(\int \left(\sum_j |Mw_j^\alpha|^{a'/\alpha} \right)^{\frac{a'}{a'} \frac{b'}{\alpha}} \right)^{\frac{a'}{b'} \frac{1}{\alpha}} &\leq C \left(\int \left(\sum_j |w_j^\alpha|^{a'/\alpha} \right)^{\frac{a'}{a'} \frac{b'}{\alpha}} \right)^{\frac{a'}{b'} \frac{1}{\alpha}} \\ &= C \left(\int \left(\sum_j |w_j|^{a'} \right)^{\frac{b'}{a'}} \right)^{\frac{1}{b'}} = C \|\{w_j\}_j\|_{L_{l^{a'}}^{b'}} = C \end{aligned}$$

El Lema 3.7 combinado con el Lema 1.7 del capítulo I dan lugar a:

COROLARIO 3.9.

Si $\beta > 2$, existe una constante C_β tal que para todo peso radial w se tiene:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^2 w(|x|) dx \leq C_\beta \int_{\mathbf{R}^n} |f|^2 M_\beta w_0(|x|) dx$$

En particular, si $v^2 \in A_1(\mathbf{R})$, entonces:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^2 v(|x|) dx \leq C \int_{\mathbf{R}^n} |f|^2 v(|x|) dx$$

PRUEBA:

Tal como tenemos descompuesto el operador T bastaría probar la acotación uniformemente en k para los dos operadores:

$$H(f\mu_k)\sigma_k \quad \text{y} \quad H(f\sigma_k)\mu_k$$

Para el primero de ellos el Lema 3.7 nos da lo que queremos, luego sólo hemos de probar la acotación para el segundo. Mayoramos $|\mu_k| \leq c\tau_k$:

$$\int_{\mathbf{R}} |H(f\sigma_k)\mu_k|^2 w_0(|x|) dx \leq C \int_{\mathbf{R}} |H(f\sigma_k)|^2 \tau_k^2 M_\beta w_0(|x|) dx$$

El Lema 1.7 demuestra que $\tau_k^2 M_\beta w$ es un peso de A_1 uniformemente en k si $\beta > 2$ y $M_\beta w < \infty$ en casi todo punto, ésto permite estimar lo anterior por:

$$\leq \int_{\mathbf{R}} |f|^2 |\sigma_k|^2 \tau_k^2 M_\beta w_0(|x|) dx$$

Recordando que $|\sigma_k| \tau_k \leq C$ acabamos la prueba de esta primera parte del corolario.

Para el caso en que $v^2 \in A_1(\mathbf{R})$ utilizamos que si tenemos un peso $w \in A_p$, $1 \leq p < \infty$, entonces existe un $\varepsilon > 0$ tal que $w^{1+\varepsilon} \in A_p$ (ver la prueba en [GR] p. 399). En nuestra situación si $v^2 \in A_1(\mathbf{R})$ entonces $v^\beta \in A_1(\mathbf{R})$ para algún $\beta > 2$. La primera parte del corolario nos da para cualquier $\beta > 2$:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^2 v(|x|) dx \leq C_\beta \int_{\mathbf{R}^n} |f|^2 M_\beta v(|x|) dx$$

Ahora bien, si v^β es un peso de A_1 , entonces:

$$M_\beta v = (M v^\beta)^{1/\beta} \leq (C v^\beta)^{1/\beta} = C v$$

■

El mismo Lema 3.7 nos permite obtener una acotación más si utilizamos el Lema 1.8.

COROLARIO 3.10.

Para $\beta > 2$ existe una constante C_β tal que para todo peso radial w se tiene:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^2 w(|x|) dx \leq C_\beta \int_{\mathbf{R}^n} |f|^2 \frac{1}{|x|^{1/2}} M_\beta(|y|^{1/2} w_0(|y|))(|x|) dx$$

En particular, si $|x|v^2(|x|) \in A_1(\mathbf{R})$, entonces:

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^2 v(|x|) dx \leq C \int_{\mathbf{R}^n} |f|^2 v(|x|) dx$$

PRUEBA:

Como en la acotación anterior, la estimación para $H(f\mu_k)\sigma_k$ independientemente de k nos la da el Lema 3.7, observando sencillamente que si $\beta > 2$:

$$Mg(x) \leq C \frac{1}{|x|^{1/2}} M_\beta(|y|^{1/2} g(|y|))(|x|)$$

Para la otra parte de la prueba, la estimación para $H(f\sigma_k)\mu_k$ utilizamos el Lema 1.8:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} |H(f\sigma_k)\mu_k|^2 w(|x|) dx &\leq C \int_{\mathbf{R}} |H(f\sigma_k)|^2 \tau_k^2 \frac{1}{|x|^{1/2}} M_\beta(|y|^{1/2} w(|y|))(|x|) dx \\ &\leq C \int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2 |\sigma_k|^2 \tau_k^2 \frac{1}{|x|^{1/2}} M_\beta(|y|^{1/2} w(|y|))(|x|) dx \end{aligned}$$

Recordando que $|\sigma_k|\tau_k \leq C$ tenemos demostrada la primera parte del corolario.

En la segunda parte se nos da la condición extra de que $|x|v^2(|x|) \in A_1(\mathbf{R})$. La parte ya probada nos da que para $\beta > 2$

$$\int_{\mathbf{R}^n} |Tf|^2 v(|x|) dx \leq C_\beta \int_{\mathbf{R}^n} |f|^2 \frac{1}{|x|^{1/2}} M_\beta(|y|^{1/2} v(|y|))(|x|) dx$$

Utilizando el mismo argumento de la segunda parte del Corolario 3.11 sabemos que existe un $\beta > 2$ tal que $|x|^{\beta/2} v^\beta(|x|) \in A_1(\mathbf{R}^n)$. Entonces

$$\begin{aligned} M_\beta(|y|^{1/2} v(|y|))(|x|) &= (M(|y|^{\beta/2} v^\beta(|y|)))^{1/\beta}(|x|) \\ &\leq C(|x|^{\beta/2} v^\beta(|x|))^{1/\beta} = C|x|^{1/2} v(|x|) \end{aligned}$$

Haciendo memoria sobre los resultados que tenemos hasta ahora, recordemos de la sección 2 que:

$$\mathcal{K}w \sim \max\{M_{\rightarrow}w_0, Aw_0\}$$

Por otro lado el operador A está acotado por los operadores que aparecen en los corolarios 3.9 y 3.10, es decir:

$$Aw_0(r) \leq C_{\beta} \min\{M_{\beta}w_0(r), r^{-1/2}M_{\beta}(s^{1/2}w_0(s))(r)\}$$

Efectivamente:

$$\begin{aligned} Aw_0(r) &= \sup_{0 \leq a < r} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_a^r |w_0(t)| \frac{t}{(t^2 - a^2)^{1/2}} dt \\ &\leq C \sup_{0 \leq a < r} \left(\frac{r-a}{r+a}\right)^{1/2} \frac{1}{r-a} \int_a^r |w_0(t)| \left|\frac{t+a}{t-a}\right|^{1/2} dt \end{aligned}$$

Llamemos $v(t) = \left|\frac{t+a}{t-a}\right|^{1/2}$. Esta función es un peso de A_1 , más aún, lo sigue siendo si la elevamos a una potencia menor que 2. Aplicamos la desigualdad de Hölder acotando lo anterior por:

$$\leq C \sup_{0 \leq a < r} v(r)^{-1} \left(\frac{1}{r-a} \int_a^r |w_0(t)|^{\beta} dt\right)^{1/\beta} \left(\frac{1}{r-a} \int_a^r |v(t)|^{\beta'} dt\right)^{1/\beta'}$$

Si $\beta > 2$, entonces $\beta' < 2$ y $v^{\beta'} \in A_1$ (con constante independiente del punto a) por tanto:

$$\begin{aligned} Aw_0(r) &\leq C v(r)^{-1} M_{\beta}w_0(r) M_{\beta',v}(r) \\ &\leq C M_{\beta}w_0(r) v(r)^{-1} C_{\beta'} v(r) = C_{\beta} M_{\beta}w_0(r) \end{aligned}$$

La acotación:

$$Aw_0(r) \leq C \frac{1}{r^{1/2}} M_{\beta}(|s|^{1/2}g(|y|))(r)$$

para $\beta > 2$, es similar aunque requiere algo más de esfuerzo.

Esto demuestra que las desigualdades de los Corolarios 3.9 y 3.10 son estrictamente más débiles que la del Teorema 3.1 que estamos en vías de probar. De esta en realidad se siguen las anteriores. Sin embargo, no es difícil ver que son suficientes para dar una demostración de la desigualdad en norma mixta, puesto que el operador que asocia a g la función $|x|^{-1/2}M_{\beta}(|y|^{1/2}g(|y|))(|x|)$ está acotado en $L^q(\mathbf{R}_+, r^{n-1}dr)$ si $n < q < 2n$ (ver la prueba del Teorema 4.2) y por lo tanto la misma técnica de la demostración del corolario 3.6 se aplica (ver capítulo IV).

§5 SEGUNDA PARTE DE LA PRUEBA

Para la prueba de la desigualdad (2) utilizaremos un operador maximal más, definido para funciones, $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ mediante

$$\mathcal{N}g(r) = M_{\rightarrow}g(r) + Bg(r)$$

para $r > 0$, donde el operador B es:

$$Bg(r) = \sup_{0 \leq \frac{r}{2} \leq a \leq c < r} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_a^r |g(t)| \frac{t}{(t^2 - c^2)^{1/2}} dt$$

Demostraremos el teorema siguiente:

TEOREMA 3.11.

Dado $\alpha > 1$ existe una constante C_α tal que para todo peso radial w se tiene

$$\int_{\mathbb{R}^n} |Tf|^2 w dx \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} |f|^2 \mathcal{N}_\alpha w_0(|x|) dx$$

El Teorema 3.1 es una consecuencia de éste si probamos que:

TEOREMA 3.12.

Dado $\gamma > 1$, existe un C_γ tal que

$$\mathcal{N}g(r) \leq C_\gamma \mathcal{K}_\gamma g(r) \quad r > 0$$

Necesitamos además el siguiente lema técnico para probar el Teorema 3.13.

LEMA 3.13.

Para todo $\gamma > 1$ existe un C_γ tal que para toda función $h \geq 0$ se tiene

$$\int_0^1 h(x) \frac{dx}{x^{1/2}} \leq C_\gamma \sup_{0 \leq m \leq 1} \left(\int_0^m h^\gamma(x) \frac{dx}{(m-x)^{1/2}} \right)^{1/\gamma}$$

Demostraremos en primer lugar el Teorema 3.13 y el Lema 3.14.

PRUEBA (TEOREMA 3.12):

Es obvio que únicamente hemos de probar que

$$Bg(r) \leq C_\gamma A_\gamma g(r) = C_\gamma (A(g^\gamma)(r))^{1/\gamma} \quad \gamma > 1$$

Fijemos a y c tales que $0 < \frac{\varepsilon}{2} \leq a \leq c < r$. Separemos la integral de la definición de B en dos :

$$\int_a^r = \int_a^c + \int_c^r$$

Para la segunda tenemos:

$$\frac{1}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_c^r |g(t)| \frac{t}{(t^2 - c^2)^{1/2}} dt \leq Ag(r)$$

Y la estimación que buscamos para la primera es:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_a^c |g(t)| \frac{t}{(c^2 - t^2)^{1/2}} dt \\ \leq C_\gamma \sup_{a \leq b \leq c} \left(\frac{1}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_b^c |g(t)|^\gamma \frac{t}{(t^2 - b^2)^{1/2}} dt \right)^{1/\gamma} \end{aligned}$$

Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $c = 1$, así $\frac{1}{2} \leq a \leq 1 < r$ y la desigualdad que tenemos que probar se transforma en:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_a^1 |g(t)| \frac{1}{(1 - t)^{1/2}} dt \\ \leq C_\gamma \sup_{a \leq b \leq 1} \left(\frac{1}{(r^2 - a^2)^{1/2}} \int_b^1 |g(t)|^\gamma \frac{1}{(t - b)^{1/2}} dt \right)^{1/\gamma} \end{aligned}$$

Hagamos el cambio de variables $t = v(s) = 1 - (1 - a)s$ en ambas integrales y llamemos $m = \frac{1-b}{1-a}$. La acotación a probar es ahora:

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-a}{r^2 - a^2} \right)^{1/2} \int_0^1 |g(v(s))| \frac{ds}{s^{1/2}} \\ \leq C_\gamma \left(\frac{1-a}{r^2 - a^2} \right)^{1/2} \sup_{0 \leq m \leq 1} \left(\int_0^m |g(v(s))|^\gamma \frac{ds}{(m-s)^{1/2}} \right)^{1/\gamma} \end{aligned}$$

Al ser $1 - a \leq r^2 - a^2$ para $\gamma \geq 1$ se tiene

$$\left(\frac{1-a}{r^2 - a^2} \right)^{1/2} \leq \left(\frac{1-a}{r^2 - a^2} \right)^{1/2\gamma}$$

El paso final de la demostración está en el Lema 3.13. ■

PRUEBA (LEMA 3.13):

Consideremos una descomposición diádica de la integral:

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(s) \frac{dx}{x^{1/2}} &= \sum_{k \geq 0} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} h(x) \frac{dx}{x^{1/2}} \\ &\leq \sum_{k \geq 0} \int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} h(x) \frac{dx}{(2^{-k} - x)^{1/2}}\end{aligned}$$

Llamemos

$$d_\gamma = \sup_{0 \leq y \leq 1} \left(\int_{y/2}^y h^\gamma(x) \frac{dx}{(y-x)^{1/2}} \right)^{1/\gamma}$$

Utilizando Hölder en cada sumando a las funciones $h(x)/(2^{-k} - x)^{1/2\gamma}$ y $1/(2^{-k} - x)^{1/2\gamma'}$ e integrando acotamos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 h(x) \frac{dx}{x^{1/2}} &\leq \sum_{k \geq 0} d_\gamma \left(\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}} \frac{dx}{(2^{-k} - x)^{1/2}} \right)^{1/\gamma'} \\ &= \sum_{k \geq 0} d_\gamma 2^{\frac{1-k}{2\gamma'}} = C_\gamma d_\gamma\end{aligned}$$

Observamos ahora que

$$d_\gamma < \sup_{0 \leq m \leq 1} \left(\int_0^m h^\gamma(x) \frac{dx}{(m-x)^{1/2}} \right)^{1/\gamma}$$

Con ello concluimos la prueba. ■

Afrontemos ahora el último paso en la prueba del Teorema 3.1.

PRUEBA (TEOREMA 3.11):

Es claro que solamente hemos de probar la desigualdad (2) cambiando \mathcal{K}_α por el operador \mathcal{N}_α . La correspondiente desigualdad (1) para \mathcal{N}_α queda probada con el Lema 3.7. Sin embargo, para simplificar ligeramente los cálculos probaremos en su lugar

$$\int_0^\infty |H_+(g\sigma_l)\mu_l|^2 u \leq C_\alpha \int_0^\infty |g|^2 \mathcal{N}_\alpha u$$

en donde

$$H_+g(r) = \int_0^\infty \frac{g(s)}{r-s} ds$$

Esto corresponde al caso $i = 2$ de las desigualdades que preceden a (1) y (2). El caso $i = 4$ es similar.

Supongamos que $g \geq 0$.

Cortemos la función μ :

$$\mu_l^*(x) = \mu_l(x) \chi_{\{l/2 < x < 3l/2\}}(x)$$

Fuera de esa zona μ_l se puede acotar por una constante:

$$|\mu_l - \mu_l^*| \leq C$$

De esta forma:

$$|H_+(g\sigma_l)\mu_l| \leq C|H_+(g\sigma_l)| + |H_+(g\sigma_l)\mu_l^*|$$

La acotación $|g\sigma_l| \leq Cg$ con una constante C independiente de l , nos permite olvidarnos del primer término. Con ello solamente hay que mayorar el segundo.

Separemos σ_l en tres trozos:

$$\begin{aligned} \sigma_l(x) &= \sigma_l(x) \chi_{\{x < l\}}(x) + \sigma_l(x) \chi_{\{l \leq x < 2l\}}(x) + \sigma_l(x) \chi_{\{x \geq 2l\}}(x) \\ &= \sigma^{(1)}(x) + \sigma^{(2)}(x) + \sigma^{(3)}(x) \end{aligned}$$

y escribamos

$$|H_+(g\sigma_l)\mu_l^*| \leq |H_+(g\sigma^{(1)})\mu_l^*| + |H_+(g\sigma^{(2)})\mu_l^*| + |H_+(g\sigma^{(3)})\mu_l^*|$$

Ahora son solamente los dos últimos términos para los que hay que estimar la norma en $L^2(u)$, porque para el primero la acotación se cumple directamente, recordando (ver capítulo I) que $|\sigma^{(1)}(x)| \leq cl^{-1/6}$ y que $\|\mu_l\|_\infty \leq cl^{1/6}$, por lo tanto, $|g\sigma^{(1)}\mu_l^*| \leq Cg$ como antes.

En el último término observamos que $|\sigma^{(3)}(x)| \leq C$ con constante independiente de l y obtenemos utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |H_+(g\sigma^{(3)})\mu_l^*|^2 u &\leq C \int_{l/2 < r < 3l/2} \left(\int_{s \geq 2l} g(s) \frac{ds}{|r-s|} \right)^2 |\mu_l^*|^2 u dr \\ &\leq C \int_{l/2 < r < 3l/2} \left(\int_{s \geq 2l} g(s) \frac{ds}{s} \right)^2 |\mu_l^*|^2 u dr \\ &= C \int_{l/2 < r < 3l/2} \left(\int_{s \geq 2l} g(s) \frac{ds}{s^{\frac{1}{2\alpha} + (1-\frac{1}{2\alpha})}} \right)^2 |\mu_l^*|^2 u dr \\ &\leq C \int_{l/2 < r < 3l/2} \left(\int_{s \geq 2l} g^2(s) \frac{ds}{s^{1/\alpha}} \int_{s > 2l} \frac{ds}{s^{2-\frac{1}{\alpha}}} \right) |\mu_l^*|^2 u dr \end{aligned}$$

e integrando:

$$= C \int_{l/2 < r < 3l/2} \left| \int_{s \geq 2l} g^2(s) \frac{ds}{s^{1/\alpha}} \frac{1}{l^{1/\alpha}} \right| |\mu_l^*|^2 u dr$$

Aplicamos Fubini y la desigualdad de Hölder y estimamos $|\mu_l^*|$ para acotar lo anterior por:

$$\begin{aligned} &\leq C \int_{s \geq 2l} g^2(s) \frac{1}{s^{1/\alpha}} \frac{1}{l^{1/\alpha'}} \int_{l/2 < r < 3l/2} u(r) |\mu_l^*(r)|^2 dr \\ &\leq C \int_{s \geq 2l} g^2(s) \left(\frac{1}{s} \int_{l/2 < r < 3l/2} u^\alpha(r) \right)^{1/\alpha} \left(\frac{1}{l} \int_{l/2 < r < 3l/2} |\mu_l^*(r)|^2 \right)^{1/\alpha'} dr \end{aligned}$$

En el intervalo que estamos considerando $|\mu_l^*|^2 = |\mu_l|^2$ es un peso de A_1 , luego:

$$\left(\frac{1}{l} \int_{l/2 < r < 3l/2} |\mu_l^*(r)|^2 \right)^{1/\alpha'} dr \leq C \left(\inf_{l/2 < r < 3l/2} |\mu_l^*(r)|^2 \right)^{1/\alpha'} \leq C$$

Incluyendo esto en la acotación que estábamos haciendo nos queda

$$\begin{aligned} &\leq C \int_{s \geq 2l} g^2(s) \left(\frac{C}{(s^2 - (l/2)^2)^{1/2}} \int_{l/2 < r < 3l/2} u^\alpha(r) \frac{r}{(r^2 - l^2)^{1/2}} dr \right) \\ &\leq C \int_{s \geq 2l} g^2(s) B_\alpha u(s) ds \\ &\leq C \int_{s \geq 2l} g^2(s) \mathcal{N}_\alpha u(s) ds \leq \int_{-\infty}^{\infty} g^2(s) \mathcal{N}_\alpha u(s) ds \end{aligned}$$

Para el término con $\sigma^{(2)}$, el único que queda por acotar, consideramos la función

$$\tilde{\sigma}(s) = \frac{|s - l|^{1/4}}{l^{1/4}} + l^{-1/6}$$

Entonces $|\sigma^{(2)}| \leq C\tilde{\sigma}$ y también se tiene $|\mu_l^* \tilde{\sigma}| \leq C$. Así pues:

$$\begin{aligned} |H_+(g\sigma^{(2)})(r) \mu_l^*(r)| &\leq |H_+(g\sigma^{(2)}) \frac{\tilde{\sigma}(s) - \tilde{\sigma}(r)}{\tilde{\sigma}(s)})(r)| |\mu_l^*(r)| \\ &\quad + |H_+(g\sigma^{(2)}) \frac{\tilde{\sigma}(r)}{\tilde{\sigma}(s)})(r)| |\mu_l^*(r)| \\ &\leq |H_+(g\sigma^{(2)}) \frac{\tilde{\sigma}(s) - \tilde{\sigma}(r)}{\tilde{\sigma}(s)})(r)| |\mu_l^*(r)| + C |H_+(g \frac{\sigma^{(2)}(s)}{\tilde{\sigma}(s)})(r)| \end{aligned}$$

El segundo sumando no requiere más trabajo, puesto que $|(g\sigma^{(2)})/\tilde{\sigma}| \leq g$. Para el otro utilizamos la acotación

$$|a^{1/4} - b^{1/4}| \leq |a - b| |a^{3/4} + b^{3/4}|^{-1}$$

válida para $a, b > 0$, ya que si $a > b$ entonces $a^{3/4}b^{1/4} > a^{1/4}b^{3/4}$, luego:

$$|a^{1/4} - b^{1/4}| |a^{3/4} + b^{3/4}| = |a - b + a^{1/4}b^{3/4} - b^{1/4}a^{3/4}| \leq |a - b|$$

Aplicamos también que $|\sigma^{(2)}| \leq C\tilde{\sigma}$ para obtener:

$$\begin{aligned} & |H_+(g\sigma^{(2)} \frac{\tilde{\sigma}(s) - \tilde{\sigma}(r)}{\tilde{\sigma}(s)})(r)| |\mu_l^*(r)| \\ & \leq C \int_{l < s < 2l} \frac{g(s)|\sigma^{(2)}(s)|}{\tilde{\sigma}(s)} \frac{|s-l|^{1/4} - |r-l|^{1/4}}{|r-s|^{1/4}} ds |\mu_l^*(r)| \\ & \leq C \int_{l < s < 2l} \frac{g(s)}{l^{1/4}(|s-l|^{3/4} + |r-l|^{3/4})} ds |\mu_l^*(r)| \end{aligned}$$

Allá donde $|s-l| \leq |r-l|$ nos olvidamos de $|s-l|^{3/4}$ y donde $|s-l| > |r-l|$ nos olvidaremos de $|r-l|^{3/4}$, mayorando lo anterior por

$$\leq C |\mu_l^*(r)| \left\{ \int_{|s-l| \leq |r-l|} \frac{g(s)}{|r-l|^{3/4} l^{1/4}} ds + \int_{|r-l|+l < s < 2l} \frac{g(s)}{|s-l|^{3/4} l^{1/4}} ds \right\}$$

En el primer sumando acotamos $|\mu_l^*(r)|$ por $C|l/(r-l)|^{1/4}$:

$$\begin{aligned} |\mu_l^*(r)| \int_{|s-l| \leq |r-l|} \frac{g(s)}{|r-l|^{3/4} l^{1/4}} ds & \leq \frac{C |\mu_l^*(r)|}{|r-l|^{3/4} l^{1/4}} \int_{|s-l| \leq |r-l|} g(s) ds \\ & \leq \frac{C}{|r-l|} \int_{|s-l| \leq |r-l|} g(s) ds \leq M g(r) \end{aligned}$$

Con ésto queda probada la acotación que queremos, puesto que como es bien sabido, se tiene

$$\int |Mf|^p u \leq C_p \int |f|^p M u$$

Calculemos ahora la acotación en $L^2(u)$ del segundo sumando. Estimamos $|\mu_l^*|$ como antes y elegimos un $\varepsilon > 0$ tal que $\frac{1}{2\alpha} < \varepsilon < \frac{1}{2}$, así:

$$\begin{aligned} & \int_{l/2 < r < 3l/2} \left(\int_{|r-l|+l < s < 2l} \frac{g(s)}{|s-l|^{3/4}} ds \right)^2 l^{-1/2} |\mu_l^*(r)|^2 u(r) dr \\ & = \int_{l/2 < r < 3l/2} \left(\int_{|r-l|+l < s < 2l} \frac{g(s)}{|s-l|^{\varepsilon/2} |s-l|^{3/4-\varepsilon/2}} ds \right)^2 \frac{1}{|r-l|^{1/2}} u(r) dr \end{aligned}$$

La desigualdad de Cauchy-Schwarz nos mayor a lo anterior por:

$$\leq \int_{l/2 < r < 3l/2} \left(\int_{|r-l|+l < s < 2l} \frac{g^2(s)}{|s-l|^\varepsilon} \right) \left(\int_{|r-l|+l < s < 2l} \frac{1}{|s-l|^{3/2-\varepsilon}} ds \right) \frac{1}{|r-l|^{1/2}} u(r) dr$$

e integrando obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_{|r-l|+l < s < 2l} \frac{1}{|s-l|^{3/2-\varepsilon}} ds \\ & < \int_{|r-l|+l < s} \frac{1}{|s-l|^{3/2-\varepsilon}} ds = \frac{C}{|r-l|^{1/2-\varepsilon}} \end{aligned}$$

Luego la norma en $L^2(u)$ que estábamos calculando es

$$\leq \int_{l/2 < r < 3l/2} \left(\int_{|r-l|+l < s < 2l} \frac{g^2(s)}{|s-l|^\varepsilon} \right) \frac{1}{|r-l|^{1-\varepsilon}} u(r) dr$$

Cambiamos el orden de integración y aplicamos la desigualdad de Hölder acotando esto por:

$$\begin{aligned} &= \int_{l < s < 2l} g^2(s) \frac{1}{|s-l|^\varepsilon} \int_{|r-l| < (|s-l| \wedge l/2)} \frac{u(r) dr}{|r-l|^{1-\varepsilon}} ds \\ &\leq \int_{l < s < 2l} g^2(s) \frac{1}{|s-l|^\varepsilon} \left(\int_{|r-l| < (|s-l| \wedge l/2)} \frac{u^\alpha(r) dr}{|r-l|^{1/2}} \right)^{1/\alpha} \\ &\quad \left(\int_{|r-l| < |s-l|} \frac{dr}{|r-l|^{(1-\varepsilon-\frac{1}{2\alpha})\alpha'}} \right)^{1/\alpha'} ds \end{aligned}$$

donde $(a \wedge b)$ significa el mínimo entre a y b . En la última integral observamos que por la elección de ε : $(1-\varepsilon-\frac{1}{2\alpha})\alpha' < (1-\frac{1}{\alpha})\alpha' = 1$, luego

$$\left(\int_{|r-l| < |s-l|} \frac{dr}{|r-l|^{(1-\varepsilon-\frac{1}{2\alpha})\alpha'}} \right)^{1/\alpha'} \cong \frac{1}{|s-l|^{(1-\varepsilon-\frac{1}{2\alpha})-\frac{1}{\alpha'}}} = \frac{1}{|s-l|^{-\varepsilon+\frac{1}{2\alpha}}}$$

Con ello la norma que calculábamos queda acotada por:

$$\begin{aligned} &\leq \int_{l < s < 2l} g^2(s) \left(\frac{1}{|s-l|^{1/2}} \int_{|r-l| < (|s-l| \wedge l/2)} \frac{u^\alpha(r)}{|r-l|^{1/2}} dr \right)^{1/\alpha} ds \\ &= \int_{l < s < 2l} g^2(s) \left(\frac{1}{|s-l|^{1/2}} \int_{a < r < s} \frac{u^\alpha(r)}{|r-l|^{1/2}} dr \right)^{1/\alpha} ds \end{aligned}$$

donde llamamos $a = \max(|2l - s|, l/2)$. Ahora bien, $|s - l|$ es comparable a $|s - a|$, lo que permite que hagamos aparecer el operador B_α y por tanto \mathcal{N}_α :

$$\begin{aligned} &\leq \int_{l < s < 2l} g^2(s) \left(\frac{1}{|s - a|^{1/2}} \int_{a < r < s} u^\alpha(r) \frac{dr}{|r - l|^{1/2}} \right)^{1/\alpha} ds \\ &\leq C \int g^2(s) B_\alpha u(s) ds \leq C \int g^2(s) \mathcal{N}_\alpha u(s) ds \end{aligned}$$

■

CAPITULO IV
ACOTACIONES VECTORIALES
DEL MULTIPLICADOR DEL DISCO

§1 Introducción.	81
§2 Demostración del Teorema 4.1	83
§3 Demostración del Teorema 4.2	87

CAPITULO IV

ACOTACIONES VECTORIALES DEL MULTIPLICADOR DEL DISCO

§1 INTRODUCCION

Recordemos que la acción de T sobre una función $f \in L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ venía dada por:

$$Tf(x) = \sum_{k,j} \frac{c_k}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} T_{\frac{n-1}{2}+k}(f_{k,j}(s)s^{\frac{n-1}{2}})(|x|)\mathcal{Y}_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

con $|c_k| \leq c_n$, donde las $f_{k,j}$ eran las componentes de la función f cuando la expresábamos en la base ortonormal de armónicos esféricos $\{\mathcal{Y}_j^{(k)}\}_{\substack{k \geq 0 \\ 1 \leq j \leq a_k}}$, es decir:

$$f(x) = \sum_{\substack{k \geq 0 \\ 1 \leq j \leq a_k}} f_{k,j}(|x|)\mathcal{Y}_j^{(k)}\left(\frac{x}{|x|}\right)$$

Esta forma de expresar T nos permite interpretarlo como un operador que actúa sobre sucesiones de funciones, las $\{f_{k,j}\}_{k,j}$.

En general, dada una sucesión de números positivos $a = \{l_k\}$ (que seguiremos suponiendo todos ellos mayores que 1, por razones técnicas) podemos considerar el operador a valores vectoriales $\tilde{T}(= \tilde{T}_{a,n})$ definido por

$$\tilde{T}(\{f_k\}_k)(r) = \left\{ \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} T_{l_k}(f_k(s)s^{\frac{n-1}{2}})(r) \right\}_k \quad r > 0$$

donde las funciones f_k están todas ellas definidas en $(0, \infty)$.

Asimismo definiremos el operador vectorial asociado, $L = L_a$, eliminando la conjugación con $s^{\frac{n-1}{2}}$,

$$L(\{f_k\}_k)(r) = \{T_{l_k} f_k\}_k \quad r > 0$$

Como sabemos, el operador \tilde{T} está acotado sobre los espacios $L_{l_2}^p(r^{n-1}dr)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$. Esto es precisamente equivalente a la acotación del multiplicador del disco en los espacios de norma mixta $L_{rad}^p L_{ang}^2(\mathbf{R}^n)$ en el mismo rango de p . Asimismo, el operador L está acotado en $L_{l_2}^p(dr)$ para $4/3 < p < 4$ (ver capítulo III, sección 4).

En este capítulo analizaremos el comportamiento de \tilde{T} y L sobre espacios $L_{l_q}^p$ para valores de q distintos de 2. Los resultados que obtendremos (Teoremas 4.1 y 4.2) guardan una cierta analogía con las desigualdades de Fefferman-Stein [FS] sobre la acotación vectorial del operador de Hardy-Littlewood. Los enunciados de estos teoremas son los siguientes:

TEOREMA 4.1.

El operador L está acotado de $L_{l_q}^p(dr)$ en $L_{l_q}^p(dr)$ para $\frac{4}{3} < p, q < 4$.

TEOREMA 4.2.

El operador $\tilde{T}_{a,n}$ está acotado de $L_{l_q}^p(r^{n-1}dr)$ en $L_{l_q}^p(r^{n-1}dr)$ para cualquier $\frac{2n}{n+1} < p, q < \frac{2n}{n-1}$.

§2 DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.1

PRUEBA (TEOREMA 4.1):

Para simplificar la notación, escribiremos k en vez de l_k . Teniendo en cuenta la descomposición del núcleo de cada T_k llamaremos L^1 y L^2 a los operadores definidos por:

$$\begin{aligned} L^1(\{f_k\}_k) &= \{\sigma_k H(\mu_k f_k)\}_k = \{L_k^1 f_k\}_k \\ L^2(\{f_k\}_k) &= \{\mu_k H(\sigma_k f_k)\}_k = \{L_k^2 f_k\}_k \end{aligned}$$

No hay restricción sobre el dominio de las funciones f_k en \mathbb{R} y por tanto, como ya observamos en el capítulo III, si probamos la acotación para cada uno de ellos la tendremos para el operador L .

Observemos en primer lugar que los operadores L^1 y L^2 guardan la siguiente relación de antisimetría:

$$\int \sum_k (L_k^1 f_k) g_k = - \int \sum_k f_k (L_k^2 g_k)$$

Así, será suficiente probar la acotación de L^1 y L^2 en los espacios $L_{l^q}^p$ con $\frac{4}{3} < q < p < 4$ y el resto se obtendrá directamente por dualidad.

La norma de cada L^i , $i = 1, 2$ en $L_{l^q}^p(\mathbb{R})$ se puede expresar como una norma en $L^{\frac{p}{q}}(\mathbb{R})$. Por el Teorema de Representación de Riesz podemos encontrar una función $u \in L^{(\frac{p}{q})'}$ con norma 1 tal que:

$$\begin{aligned} \left(\int \left(\sum_k |L_k^i f_k|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} &= \left\| \sum_k |L_k^i f_k|^q \right\|_{\frac{p}{q}}^{\frac{1}{q}} \\ &= \left(\int \sum_k |L_k^i f_k|^q u \right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_k \int |L_k^i f_k|^q u \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

para $i = 1, 2$.

Esta última expresión la sabríamos acotar si encontráramos un operador \tilde{M} acotado de $L^{(\frac{p}{q})'}$ en $L^{(\frac{p}{q})'}$ y tal que

$$\int |L_k^i f_k|^q u \leq C \int |f_k|^q \tilde{M} u$$

con una constante c independiente de k , pues en ese caso, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} & \left(\int \left(\sum_k |L_k^i f_k|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_k \int |L_k^i f_k|^q u \right)^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C \left(\sum_k \int |f_k|^q \tilde{M}u \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \left(\int \sum_k |f_k|^q \tilde{M}u \right)^{\frac{1}{q}} \end{aligned}$$

y la desigualdad de Hölder nos da:

$$\begin{aligned} & \leq C \left(\int \left(\sum_k |f_k|^q \right)^{\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} \|\tilde{M}u\|_{L^{(p/q)'}}^{\frac{1}{q}} \\ & \leq C \|\{f_k\}_k\|_{L_{l_q}^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Separamos ahora los casos de L^1 y L^2 para buscar cuál es el operador \tilde{M} que necesitamos.

Para L^1 lo que debe cumplir ese operador es:

$$\int |\sigma_k H(\mu_k f_k)|^q u \leq c \int |f_k|^q \tilde{M}u$$

llamando $\mu_k f_k = g_k$, la expresión se traduce en:

$$\int |\sigma_k H g_k|^q u \leq c \int |g_k|^q \frac{1}{|\mu_k|^q} \tilde{M}u$$

y utilizando el Lema 1.5 ésto se obtendrá si

$$\int |H g_k|^q \tau_k^{-q} u \leq c \int |g_k|^q \tau_k^{-q} \tilde{M}u$$

donde recordemos que

$$\tau_k(t) = \min(k^{\frac{1}{6}}, |\frac{k+t}{k-t}|^{\frac{1}{4}})$$

Tenemos pues que estudiar cuándo es $(\tau_k^{-q} u, \tau_k^{-q} \tilde{M}u)$ un par de pesos A_q para la Transformada de Hilbert.

El operador L^2 por su parte nos da la condición:

$$\int |\mu_k H(\sigma_k f_k)|^q u \leq c \int |f_k|^q \tilde{M}u$$

denotando $h_k = \sigma_k f_k$ obtenemos:

$$\int |\mu_k H h_k|^q u \leq c \int |h_k|^q \frac{1}{|\sigma_k|^q} \tilde{M}u$$

y por el Lema 1.5 ésto se cumplirá cuando:

$$\int |H h_k|^q \tau_k^q u \leq c \int |h_k|^q \tau_k^q \tilde{M}u$$

Ahora nos interesa averiguar cuándo es $(\tau_k^q u, \tau_k^q \tilde{M}u)$ un par de pesos A_q para la Transformada de Hilbert.

Buscaremos los candidatos a \tilde{M} dentro de los operadores M_γ , que sabemos están acotados en L^p si y sólo si $\gamma < p$.

Nos interesa que el operador esté acotado en $L^{(\frac{p}{q})'}$, luego ha de tenerse:

$$\gamma < \left(\frac{p}{q}\right)' = \frac{p}{p-q}$$

Nos resta solamente comprobar que esos candidatos M_γ cumplen los requisitos.

Para L^1 necesitamos que $\tau_k^{-q} M_\alpha u$ esté en A_q .

La factorización de pesos (ver [GR]) nos asegura que si w_0 y w_1 son dos pesos de A_1 , entonces $w_0 w_1^{1-p}$ es un peso de A_p . Luego, si escribimos:

$$\tau_k^{-q} M_\alpha u = (\tau_k^{\frac{-q}{1-q}})^{1-q} M_\alpha u$$

para probar que esta expresión es un peso de A_q sólo tenemos que demostrar que $\tau_k^{\frac{-q}{1-q}} = \tau_k^{q'}$ es un peso de A_1 cuando $\frac{4}{3} < q$, porque M_α ya lo es, para todo α mayor que 1.

Para ello observamos que $\frac{-q}{1-q} = q' < 4$ cuando $q > \frac{4}{3}$, y el Lema 1.6 nos asegura que en ese caso $\tau_k^{q'} \in A_1$. Así concluye esta parte de la prueba.

Consideremos ahora la condición que necesitábamos para la acotación del operador L^2 .

Por la demostración del Lema 1.7 sabemos que $\tau_k^q M_\beta u$ es un peso de A_1 para $\beta > \eta'$ siempre que

$$(\tau_k^q)^\eta \in A_1$$

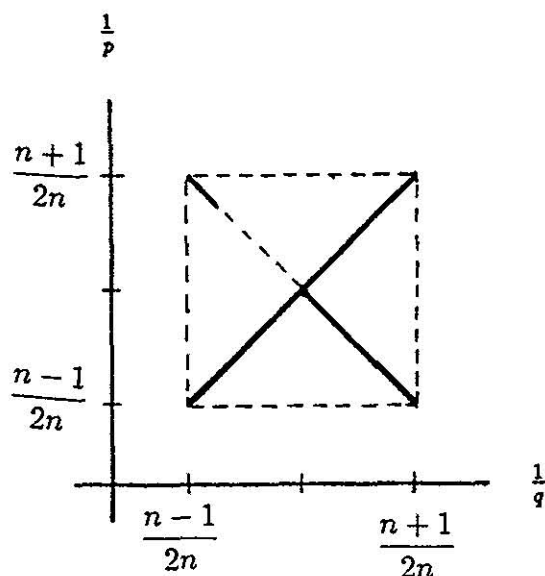
para algún $\eta > 1$, y ésto, a su vez, lo tenemos asegurado por el Lema 1.6 si $q\eta < 4$, es decir, $\eta < \frac{4}{q}$. En ese caso el índice β debe cumplir:

$$\beta > \eta' > \frac{4}{4-q}$$

Hemos acabado pues la demostración del teorema. ■

Notemos que hemos probado que: $\tau_k^{-q} M_\alpha u \in A_q$ si $q > \frac{4}{3}$ (porque entonces $q' < 4$) y $\tau_k^q M_\beta u \in A_1$ si $q < 4$ y $\beta > 4/(4-q)$ (porque podemos encontrar entonces $1 < \eta < 4/q$ con $\eta' < \beta$). Si observamos que el operador M_γ está acotado en $L^{(p/q)'}$ cuando $\delta < (p/q)'$, en el primer caso hemos probado que L^1 está acotado en el espacio L_{lq}^p para $4/3 < q < p < \infty$.

En el segundo caso, la observación anterior junto con la condición $\gamma > 4/(4-q)$, necesaria para la acotación, nos dan que el operador L^2 está acotado en L_{lq}^p cuando $4/(4-q) < p/(p-q)$, es decir, cuando $1 < q < p < 4$.



§3 DEMOSTRACION DEL TEOREMA 4.2

PRUEBA (TEOREMA 4.2):

Definiremos en este caso $T^1(=T_{1,n})$ y $T^2(=T_{2,n})$ por

$$T^1(\{f_k\}_k)(x) = \left\{ \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \sigma_k(|x|) H(\mu_k(|y|)|y|^{\frac{n-1}{2}} f_k(y))(|x|) \right\} = \{T_k^1 f_k(x)\}_k$$

$$T^2(\{f_k\}_k)(x) = \left\{ \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \mu_k(|x|) H(\sigma_k(|y|)|y|^{\frac{n-1}{2}} f_k(y))(|x|) \right\} = \{T_k^2 f_k(x)\}_k$$

La idea es entonces probar que tanto $T_{1,n}$ como $T_{2,n}$ están acotados en $L_{|x|^{n-1}}^p(\mathbb{R}, |x|^{n-1} dx)$ para valores $\frac{2n}{n+1} < p, q < \frac{2n}{n-1}$. Puesto que de nuevo se tiene la relación

$$\int_{\mathbb{R}} T_k^1 g(x) f(x) |x|^{n-1} dx = - \int_{\mathbb{R}} g(x) T_k^2 f(x) |x|^{n-1} dx$$

por dualidad bastará probarlo para uno de ellos, T^1 .

Además, por interpolación bastará probarlo para valores de $(1/p, 1/q)$ en el interior del cuadrado de vértices $(1/p_i, 1/p_j)$, donde $i, j \in \{0, 1\}$ y arbitrariamente cercanos a éstos. (Recordemos que $p_0 = \frac{2n}{n+1}$ y $p_1 = \frac{2n}{n-1}$).

La estrategia consistirá en acercarnos a los vértices del cuadrado a lo largo de las diagonales (véase el gráfico de esta página).

Caso $1/p = 1/q$

Tenemos ahora $p = q$ y podemos expresar:

$$\|T^1\{f_k\}_k\|_{L_{ip}^p(|x|^{n-1}dx)}^p = \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} |\sigma_k(|x|)H(\mu_k(|y|)|y|^{\frac{n-1}{2}}f_k(y))(|x|)|^p |x|^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} dx$$

Para continuar necesitamos la siguiente modificación del Lema 3.7 para el caso de pesos potencia:

LEMA 4.3.

Si $v(x) = |x|^\alpha$, para $p > 4/3$ se cumple

$$\int_{\mathbf{R}} |\sigma_k(|x|)H(\mu_k(s)G(s))(x)|^p v(x) dx \leq C_p \int_{\mathbf{R}} |G(x)|^p v(x) dx$$

con constante C_p independiente de k siempre que $v \in A_p(\mathbf{R})$, es decir: $-1 < \alpha < p - 1$.

Recordemos que el Lema 3.7 sólo nos garantizaba la desigualdad para $v \in A_{3p/4}$ (aunque allí no se pedía que el peso fuera una potencia).

El Lema 4.3 aplicado al peso $v(x) = |x|^{(n-1)(1-\frac{p}{2})}$ nos permite acotar ésto siempre que v esté en A_p , es decir, cuando:

$$-1 < (n-1)(1-\frac{p}{2}) < p-1$$

o lo que es igual,

$$\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$$

Con ello, para este rango de p :

$$\begin{aligned} \|T^1\{f_k\}_k\|_{L_{ip}^p(|x|^{n-1}dx)}^p &\leq C_p \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} ||x|^{\frac{n-1}{2}} f_k(|x|)|^p |x|^{(n-1)(1-\frac{p}{2})} dx \\ &= C_p \| \{f_k\}_k \|_{L_{ip}^p(|x|^{n-1}dx)}^p \end{aligned}$$

Queda así para acabar este caso dar una prueba del lema.

PRUEBA (LEMA 4.3):

Siguiendo el mismo argumento de la demostración del Lema 3.7. Lo único que necesitamos comprobar es que $|x|^\alpha \tau_k^{-p}(x) \in A_p$. El caso $-1 < \alpha \leq 0$ se sigue directamente del Lema 3.7 porque tendríamos $|x|^\alpha \in A_1 \subset A_{3p/4}$.

Para $0 \leq \alpha < p-1$ utilizaremos la propiedad de que $w \in A_p \iff w^{-1/(p-1)} \in A_{p'}$. En nuestro caso, tendríamos que probar que $|x|^{-\alpha/(p-1)} \tau_k^{p'} \in A_{p'}$. De hecho, como en casos anteriores no es difícil ver que se tiene $|x|^{-\beta} \tau_k^{p'} \in A_1$ si $0 \leq \beta < 1$ y $p' < 4$, que es la situación en la que nos encontramos. ■

Esto termina la demostración del caso $p = q$.

Caso $1/p + 1/q = 1$

Ahora es $q = p'$. Vamos a separar la diagonal en dos partes.

(b.1) Supongamos que $q < 2$. Fijada $\{f_k\}_k$ sabemos que existe una función positiva $u \in L^{(p/q)'}(|x|^{n-1}dx)$ de norma unidad tal que

$$\begin{aligned} \|T^1\{f_k\}_k\|_{L_{lq}^p(|x|^{n-1}dx)}^q &= \left\| \sum_k |T_k^1 f_k|^q \right\|_{L^{p/q}(|x|^{n-1}dx)} \\ &= \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{|x|^{\frac{n-1}{2}}} \sigma_k(|x|) H(\mu_k(|y|)|y|^{\frac{n-1}{2}} f_k(y))(x) \right|^q u(x) |x|^{n-1} dx \end{aligned}$$

La aplicación del Lema 3.7 a un peso de la forma $M_\alpha w$ tal como vimos en el capítulo III permite mayorar lo anterior por:

$$\leq C \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} \left| |x|^{\frac{n-1}{2}} f_k(x) \right|^q M_\alpha(u(y)|y|^{(n-1)(1-\frac{q}{2})})(x) dx$$

para un $\alpha > 1$.

Utilizando la desigualdad de Hölder obtenemos:

$$\leq C_\alpha \|\{f_k\}_k\|_{L_{lq}^p(|x|^{n-1}dx)}^q \left\| \frac{1}{|x|^{(n-1)(1-\frac{q}{2})}} M_\alpha(u(y)|y|^{(n-1)(1-\frac{q}{2})})(r) \right\|_{L^{(p/q)'}(|x|^{n-1}dx)}$$

Sólo nos hace falta saber ahora cuándo el operador que asocia a u la función $|x|^{-(n-1)(1-\frac{q}{2})} M_\alpha(u(y)|y|^{(n-1)(1-\frac{q}{2})})(|x|)$ está acotado en $L^\gamma(|x|^{n-1}dx)$ con $\gamma = (p/q)'$ y $p = q'$, es decir, $\gamma = 1/(2-q)$. Para ello basta con que

$$|x|^{(n-1)-(n-1)(1-\frac{q}{2})\gamma} \in A_\gamma(\mathbb{R})$$

es decir, que se tenga

$$-1 < (n-1) - (n-1)(1 - \frac{q}{2})\gamma < \gamma - 1$$

o lo que es lo mismo,

$$-1 < \frac{n-1}{2} < \frac{1}{2-q} - 1$$

La primera de estas desigualdades se cumple siempre, mientras que la otra exige que q sea mayor que $\frac{2n}{n+1}$, lo cual formaba parte de nuestra hipótesis.

(b.2) Para finalizar el caso $q = p'$ supondremos que $q > 2$ y además está próximo a $\frac{2n}{n-1}$.

Utilizaremos la dualidad y probaremos que T^2 está acotado en $L_{|x|}^p(|x|^{n-1}dx)$ cuando $p = q'$ con $2 > q > \frac{2n}{n+1}$ y q "próximo" a $\frac{2n}{n+1}$. Esto será suficiente para poder obtener por interpolación el resultado que estamos probando.

Como antes, fijada $\{f_k\}_k$ existe una función $u \in L^{(p/q)'}(|x|^{n-1}dx)$ de norma unidad tal que

$$\begin{aligned} & \|T^2\{f_k\}_k\|_{L_{|x|}^p(|x|^{n-1}dx)}^q \\ &= \sum_k \int_0^\infty |\mu_k(|x|)H(\sigma_k(|y|)f_k(y)|y|^{\frac{n-1}{2}})(x)|^q |x|^{(n-1)(1-\frac{q}{2})}u(x)dx \end{aligned}$$

Ahora necesitaremos la siguiente modificación del Lema 1.8:

LEMA 4.4.

Si $1 < q < 4$ y $\beta > (4/q)' = 4/(4-q)$ entonces

$$\tau_k^q(x) \frac{1}{|x|^{q/4}} M_\beta(|y|^{q/4}w(y))(x) \in A_1$$

uniformemente en k (para toda w tal que $M_\beta(|y|^{q/4}w(y))(x)$ sea finito en casi todo punto).

Este lema es una extensión de un resultado anterior, el Lema 1.8, en donde se consideraba el caso $q = 2$. Véase también el Corolario 3.10, donde se hace una aplicación similar a la que haremos ahora.

Siguiendo con la demostración de este caso, tenemos

$$\begin{aligned} & \|T^2\{f_k\}_k\|_{L_{iq}^p(|x|^{n-1}dx)}^q \\ & \leq C_q \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(x)| |x|^{\frac{n-1}{2}} |^q \frac{1}{|x|^{q/4}} M_\beta(|y|^{(n-1)(1-\frac{q}{2})+\frac{q}{4}} u(y))(|x|) dx \\ & \leq C_q \sum_k \int_{-\infty}^{\infty} |f_k(x)|^q \frac{1}{v(|x|)} M_\beta(v(|y|)u(y))(x) |x|^{n-1} dx \end{aligned}$$

donde hemos denotado $v(s) = s^{(n-1)(1-\frac{q}{2})+\frac{q}{4}}$ y $\beta > (4/q)'$ para poder aplicar el lema. La desigualdad de Hölder nos mayor a lo anterior por:

$$\leq C_q \| \{f_k\}_k \|_{L_{iq}^p(|x|^{n-1}dx)}^q \| \frac{1}{v} M_\beta(vu) \|_{L^{(p/q)'}(|x|^{n-1}dx)}$$

Ahora sólo nos falta saber cuándo el operador $u \rightarrow \frac{1}{v} M_\beta(vu)$ está acotado en el espacio $L^\gamma(|x|^{n-1}dx)$, para $\gamma = (p/q)'$ y $\beta = (4/q)'$. Para ello necesitamos $\beta < \gamma$, es decir, $q > 4/3$, y que

$$|x|^{(n-1)-\{(n-1)(1-\frac{q}{2})+\frac{q}{4}\}\gamma} \in A_{\gamma/\beta}$$

o, lo que es lo mismo

$$-1 < (n-1) - \{(n-1)(1-\frac{q}{2})+\frac{q}{4}\} \frac{1}{2-q} < \frac{4-q}{4(2-q)} - 1$$

que se transforma en

$$-1 < \frac{n-1}{2} - \frac{q}{4(2-q)} < \frac{4-q}{4(2-q)} - 1$$

La segunda desigualdad es equivalente a :

$$q > \frac{2n}{n+1}$$

que es nuestra hipótesis de partida, mientras que la primera nos lleva a

$$q < \frac{4(n+1)}{2n+3}$$

Esta última condición no nos da ningún problema para la demostración del teorema, porque solamente necesitamos valores de q cerca del extremo $\frac{2n}{n+1}$.

El resto de la acotación de T^1 lo obtenemos por interpolación. ■

Lo único que hemos de añadir es la demostración del Lema 4.4.

PRUEBA (LEMA 4.4):

Observamos que

$$\frac{\tau_k^q}{|r|^{q/4}} \sim C \max \left\{ \frac{1}{|r|^{q/4}}, \min \left(k^{-q/12}, \frac{1}{||r| - k|^{q/4}} \right) \right\}$$

Luego $\tau_k^q/|r|^{q/4}$ es un peso de $A_1(\mathbb{R})$ uniformemente en k , más aún, lo sigue siendo si lo elevamos a una potencia $\alpha < 4/q$.

También sabemos que $M_\beta^{\alpha'}(v) \in A_1$ si $\alpha' < \beta$ siempre que v sea una función tal que $M_\beta^{\alpha'}(v)$ sea finito en casi todo punto.

En estas circunstancias, cuando ambas funciones sean pesos de A_1 , la desigualdad de Hölder nos permite estimar:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{|I|} \int_I \frac{\tau_k^q(r)}{|r|^{q/4}} M_\beta(u(s)|s|^{q/4})(r) dr \\ & \leq \left(\frac{1}{|I|} \int_I \left| \frac{\tau_k^q(r)}{|r|^{q/4}} \right|^\alpha dr \right)^{1/\alpha} \left(\frac{1}{|I|} \int_I (M_\beta(u(s)|s|^{q/4})(r))^{\alpha'} dr \right)^{1/\alpha'} \\ & \leq C \inf_I \frac{\tau_k^q(r)}{|r|^{q/4}} \inf_I M_\beta(v(s)|s|^{q/4})(r) \\ & \leq C \inf_I \frac{\tau_k^q(r)}{|r|^{q/4}} M_\beta(v(s)|s|^{q/4})(r) \end{aligned}$$

Las limitaciones que tenemos son el que podamos elegir el α apropiado, pero siendo $\beta > 4/(4 - q)$ es posible encontrar un $\alpha > 1$ tal que $\beta > \alpha' > 4/(4 - q)$, lo que de forma automática, nos da $\alpha < 4/q$. . Acabamos así la demostración del lema. ■

CAPITULO V

ACOTACIONES VECTORIALES EXTREMALES
DEL MULTIPLICADOR DEL DISCO

§1 Estimaciones para sucesiones de funciones en l^2	94
§2 Demostración de las acotaciones extremas	96

CAPITULO V

ACOTACIONES VECTORIALES EXTREMALES DEL MULTIPLICADOR DEL DISCO

§1 ESTIMACIONES PARA SUCESSIONES DE FUNCIONES EN l^2

De nuevo nos ocupamos en esta memoria de acotaciones extremales. Se trata como antes de acotaciones de tipo débil restringido y las obtendremos para los exponentes $p_0 = \frac{2n}{n+1}$ y $p_1 = \frac{2n}{n-1}$ como ocurría en el capítulo II.

La importancia de las estimaciones de tipo débil restringido radica en que son suficientes para aplicar los teoremas de interpolación similares a los de Marcinkiewicz, según encontramos en el libro de Stein y Weiss [SW].

Como consecuencia del Teorema 3.1 demostramos que el operador T debidamente interpretado a valores vectoriales como hicimos en la introducción del capítulo IV, estaba acotado en el espacio $L^p_{l^2}(\mathbf{R}_+, r^{n-1}dr)$ para $\frac{2n}{n+1} < p < \frac{2n}{n-1}$. Ahora nos ocuparemos de esos exponentes extremos y probaremos:

TEOREMA 5.1.

El operador T (o, para mantener la notación del capítulo IV, \tilde{T}) está acotado entre los espacios $L^{p_i,1}_{l^2}(\mathbf{R}_+, r^{n-1}dr)$ y $L^{p_i,\infty}_{l^2}(\mathbf{R}_+, r^{n-1}dr)$, $i = 0, 1$, donde $p_0 = \frac{2n}{n+1}$, $p_1 = \frac{2n}{n-1}$ y $n \geq 2$.

Esta desigualdad vectorial tiene la siguiente interpretación en los espacios de norma mixta:

TEOREMA 5.2.

El operador T está acotado entre los espacios de norma mixta:

$$L^{p_i,1}_{rad} L^2_{ang}(\mathbf{R}^n) \longrightarrow L^{p_i,\infty}_{rad} L^2_{ang}(\mathbf{R}^n) \quad i = 0, 1$$

siendo $p_0 = \frac{2n}{n+1}$ y $p_1 = \frac{2n}{n-1}$.

Como hemos dicho anteriormente, las desigualdades de tipo débil restringido p_0 y p_1 son suficientes para demostrar desigualdades fuertes de tipo p para $p_0 < p < p_1$. Por lo tanto, el Corolario 3.6 también puede obtenerse por interpolación a partir del Teorema 5.2.

§2 DEMOSTRACION DE LAS ACOTACIONES EXTREMALES

PRUEBA (TEOREMA 5.1):

La demostración consistirá en probar la acotación para los operadores P^1 , P^2 , P^3 y P^4 que definimos mediante:

$$\begin{aligned} P^1\{f_k\}_k(r) &= \{\sigma_k(r)r^{-\frac{n-1}{2}}H_+(\mu_k(s)f_k(s)s^{\frac{n-1}{2}})(r)\}_k = \{P_k^1 f_k\}_k \\ P^2\{f_k\}_k(r) &= \{\mu_k(r)r^{-\frac{n-1}{2}}H_+(\sigma_k(s)f_k(s)s^{\frac{n-1}{2}})(r)\}_k = \{P_k^2 f_k\}_k \\ P^3\{f_k\}_k(r) &= \{\sigma_k(r)r^{-\frac{n-1}{2}}H_+(\mu_k(s)f_k(s)s^{\frac{n-1}{2}})(-r)\}_k = \{P_k^3 f_k\}_k \\ P^4\{f_k\}_k(r) &= \{\mu_k(r)r^{-\frac{n-1}{2}}H_+(\sigma_k(s)f_k(s)s^{\frac{n-1}{2}})(-r)\}_k = \{P_k^4 f_k\}_k \end{aligned}$$

para $r > 0$.

Como en casos anteriores, es fácil ver que P^i y P^{i+1} son (excepto por el signo) adjuntos, para $i=1,3$, lo que nos permite probar las acotaciones extremales solamente para P^1 y P^3 y obtenerlas para los otros dos operadores por dualidad.

Nos ocuparemos de probar las acotaciones para P^1 . Las estimaciones de P^3 se obtienen directamente de ellas tal como veremos en su momento.

Las desigualdades que queremos probar son:

$$w\{r : (\sum_k |P_k^1 f_k|^2(r))^\frac{1}{2} > \lambda\}^\frac{1}{p_i} \leq \frac{c}{\lambda} \|(\sum_k |f_k|^2)^\frac{1}{2}\|_{L^{p_i,1}(w)}$$

para $i = 0, 1$, donde w es el peso $w(r) = r^{n-1}$.

Consideremos los intervalos $I_l = [2^l, 2^{l+1})$ con $l \in \mathbb{Z}$ y sus dilatados $I_l^* = [2^{l-1}, 2^{l+2})$ y separemos cada función f_k en dos partes:

$$f_k = f_k \chi_{I_l^*} + f_k \chi_{(I_l^*)^c} = f_{k,l}^1 + f_{k,l}^2$$

También vamos a separar en dos cada P_k^1 , pero cortándolo previamente con las funciones características de los intervalos I_l . Llamaremos A_k y B_k a los dos términos así obtenidos.

$$\begin{aligned} P_k^1 f_k &= \sum_l P_k^1(f_k) \chi_{I_l} \\ &= \sum_l P_k^1(f_{k,l}^1) \chi_{I_l} + \sum_l P_k^1(f_{k,l}^2) \chi_{I_l} \\ &= A_k + B_k \end{aligned}$$

Entonces, $P^1\{f_k\}_k = \{A_k\}_k + \{B_k\}_k$

(a). Acotación de $\{A_k\}_k$

Podemos escribir:

$$\begin{aligned} w\{r : (\sum_k |A_k|^2)^{\frac{1}{2}}(r) > \lambda\} &= w\{r : \|A_k\|_{l^2}(r) > \lambda\} \\ &\leq \frac{c}{\lambda^{p_i}} \int \|A_k\|_{l^2}^{p_i} r^{n-1} dr \\ &= \frac{c}{\lambda^{p_i}} \int \left\| \sum_l T_k^1 f_{k,l}^1 \chi_{I_l} \right\|_{l^2}^{p_i} r^{n-1} dr \end{aligned}$$

Por ser los I_l disjuntos ésto es igual a:

$$= \frac{c}{\lambda^{p_i}} \sum_l \int_{I_l} \|P_k^1 f_{k,l}^1\|_{l^2}^{p_i} r^{n-1} dr$$

Hagamos aparecer de nuevo el operador L^1 del capítulo anterior, sección 2, expresando esa suma como:

$$= \frac{c}{\lambda^{p_i}} \sum_l \int_{I_l} \left\| \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} L_k^1(f_{k,l}^1 s^{\frac{n-1}{2}})(r) \right\|_{l^2}^{p_i} r^{n-1} dr$$

Llamaremos $R(r) = r^{n-1-p_i(\frac{n-1}{2})}$ para simplificar la notación, quedando:

$$= \frac{c}{\lambda^{p_i}} \sum_l \int_{I_l} \|L_k^1(f_{k,l}^1 s^{\frac{n-1}{2}})(r)\|_{l^2}^{p_i} R(r) dr$$

Para p_0 tendremos $R(r) = r^{\frac{n-1}{n+1}}$ y para p_1 , $R(r) = r^{-1}$. En cualquier caso se tiene que $R(r)$ es un peso esencialmente constante en cada intervalo diádico I_l y podemos sacarlo de la integral como una constante, acotando lo anterior por:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c}{\lambda^{p_i}} \sum_l R(2^l) \int_{I_l} \|L_k^1(f_{k,l}^1 s^{\frac{n-1}{2}})(r)\|_{l^2}^{p_i} dr \\ &\leq \frac{c}{\lambda^{p_i}} \sum_l R(2^l) \int_0^\infty \|L_k^1(f_{k,l}^1 s^{\frac{n-1}{2}})(r)\|_{l^2}^{p_i} dr \end{aligned}$$

Recordemos que L^1 estaba acotado en $L_{l^2}^p$ para $\frac{4}{3} < p$ y que $p_1 > 4/3$ para todo $n \geq 2$, mientras que p_0 está en ese rango sólo si $n > 2$. Eso nos acota la expresión anterior por:

$$\leq \frac{c}{\lambda^{p_i}} \sum_l R(2^l) \int_0^\infty \|f_{k,l}^1\|_{l^2}^{p_i} r^{p_i \frac{n-1}{2}} dr$$

Teniendo en cuenta que $f_{k,l}^1$ tiene soporte en $(I_l)^*$ podemos volver a introducir $R(2^l)$ dentro de la integral como $R(r)$, mayorando la última expresión por:

$$\begin{aligned} &\leq \frac{c}{\lambda^{p_i}} \sum_l \int_{I_l^*} \|f_{k,l}^1\|_{l_2^{p_i}}^{p_i} r^{p_i \frac{n-1}{2}} R(r) dr \\ &= \frac{c}{\lambda^{p_i}} \sum_l \int_{I_l^*} \|f_{k,l}^1\|_{l_2^{p_i}}^{p_i} r^{n-1} dr \end{aligned}$$

Por último, observando que el solapamiento máximo de los intervalos I_l^* es de tres, acotamos lo anterior por:

$$\leq \frac{3c}{\lambda^{p_i}} \int_0^\infty \|f_{k,l}^1\|_{l_2^{p_i}}^{p_i} r^{n-1} dr$$

que es lo que queríamos probar.

El argumento que hemos empleado aquí es el mismo del Lema 1.3 de la Introducción.

(b). Acotación de $\{B_k\}_k$

Para cada B_k el denominador $r - s$ que aparece por la Transformada de Hilbert dentro de la integral podemos sustituirlo por $r + s$. La razón es que para que un término no sea nulo se debe cumplir $r \in I_l$ mientras que $s \notin I_l^*$. La integral que obtenemos con esta sustitución es comparable a la anterior:

$$\begin{aligned} |B_k| &= \left| \sum_l \frac{\sigma_k(r) \chi_{I_l}(r)}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_{(I_l^*)^c} \frac{f_{k,l}^2(s) \mu_k(s)}{r - s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \right| \\ &\leq c \sum_l \frac{|\sigma_k(r)|}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{|f_k(s) \mu_k(s)|}{r + s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \\ &= c \frac{|\sigma_k(r)|}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{|f_k(s) \mu_k(s)|}{r + s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \end{aligned}$$

Observamos ahora que la expresión por la que hemos acotado B_k mayorada también $P_k^3 f_k$, luego las estimaciones que de ahora en adelante hacemos para $\{B_k\}_k$ son también válidas para el operador $P^3 \{f_k\}_k$. De esta forma no tenemos que preocuparnos más que de los términos de P^1 que quedan por estimar.

Separemos la integral en dos partes: la correspondiente a integrar sobre $Z_k = (k/2, 3k/2)$ y la que se obtiene integrando en el complementario de ese conjunto. De esta forma podemos aprovechar las propiedades de las funciones σ_k y μ_k . Hemos llegado a:

$$\begin{aligned} |B_k| &\leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \left\{ \int_{Z_k^c} \frac{|f_k(s)\mu_k(s)|}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \right. \\ &\quad \left. + \int_{Z_k} \frac{|f_k(s)\mu_k(s)|}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \right\} \\ &= B_k^1 + B_k^2 \end{aligned}$$

(b.1). Estimación de $\{B_k^1\}_k$ para $n \geq 2$

Fuera del intervalo Z_k podemos acotar la función μ_k sencillamente por una constante y sacarla fuera de la integral. Observamos que se cumple:

$$\|\mu_k \chi_{Z_k^c}\|_{\infty} \leq C < \infty$$

y la estimación para B_k^1 queda:

$$\begin{aligned} \|B_k^1\|_{l^2} &= \left\| \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_{Z_k^c} \frac{|f_k(s)\mu_k(s)|}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \right\|_{l^2} \\ &\leq c \left\| \frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{|f_k(s)|}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \right\|_{l^2} \\ &\leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{\|f_k(s)\|_{l^2}}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de la desigualdad integral de Minkowski.

Esta última expresión ya la estimamos en el capítulo II dentro de la prueba del teorema sobre las acotaciones extremas. En esa ocasión, lo que se probaba era que

$$\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{|F(s)|}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \leq \frac{c}{r^{\frac{n+1}{2}}} \|F\|_{L^{p_0,1}(r^{n-1} dr)}$$

y que:

$$\frac{1}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^{\infty} \frac{|F(s)|}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \|F\|_{L^{p_1,1}(r^{n-1} dr)}$$

Esto se traduce en la estimación de B_k^1 para $p_0 = \frac{2n}{n+1}$ en:

$$\begin{aligned} \|B_k^1\|_{l^2} &\leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{\|f_k(s)\|_{l^2}}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \\ &\leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \| \|f_k\|_{l^2} \|_{L^{p_0,1}(r^{n-1}dr)} \\ &= \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \| \{f_k\}_k \|_{L_{l^2}^{p_0,1}(r^{n-1}dr)} \end{aligned}$$

Por tanto, siendo $r^{-\frac{n+1}{2}} \in L^{\frac{2n}{n+1},\infty}(r^{n-1}dr) = (L^{\frac{2n}{n+1},1}(r^{n-1}dr))^*$:

$$\|B_k^1\|_{L_{l^2}^{\frac{2n}{n+1},\infty}(r^{n-1}dr)} \leq \| \{f_k\}_k \|_{L_{l^2}^{\frac{2n}{n+1},1}(r^{n-1}dr)}$$

ésto es lo que buscábamos.

Para el exponente p_1 obtenemos:

$$\begin{aligned} \|B_k^1\|_{l^2} &\leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_0^\infty \frac{\|f_k(s)\|_{l^2}}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \\ &= \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \| \{f_k\}_k \|_{L_{l^2}^{p_1,1}(r^{n-1}dr)} \end{aligned}$$

Al ser $r^{-\frac{n-1}{2}} \in L^{\frac{2n}{n-1},\infty}(r^{n-1}dr)$ llegamos a que:

$$\|B_k^1\|_{L_{l^2}^{\frac{2n}{n-1},\infty}(r^{n-1}dr)} \leq c \| \{f_k\}_k \|_{L_{l^2}^{\frac{2n}{n-1},\infty}(r^{n-1}dr)}$$

(b.2) Estimación de $\{B_k^2\}_k$ para $n > 2$.

Comencemos con la estimación en $p_1 = \frac{2n}{n-1}$ (que como en el caso (a) será válida también para $n = 2$).

$$\begin{aligned} B_k^2 &\leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_{Z_k} \frac{|f_k(s)\mu_k(s)|}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \\ &\leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_{Z_k} |f_k(s)\mu_k(s)| s^{\frac{n-3}{2}} ds \end{aligned}$$

Consideremos las funciones $f_k(s)s^{\frac{n-2}{2}}$ y $\mu_k(s)s^{-1/2}$ y apliquemos la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$B_k^2 \leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \left(\int_{Z_k} |f_k(s)|^2 s^{n-2} ds \right)^{1/2} \left(\int_{Z_k} \frac{|\mu_k(s)|^2}{s} \right)^{1/2}$$

En la segunda de esas integrales podemos sacar el denominador fuera como k y por último mayorar $|\mu_k|^2$ por un peso de A_1 , τ_k^2 , luego:

$$\int_{Z_k} \frac{|\mu_k(s)|^2}{s} ds \leq \frac{C}{k} \int_{Z_k} |\mu_k(s)|^2 ds \leq \frac{C}{k} \int_{Z_k} |\tau_k(s)|^2 ds \leq C \inf_{Z_k} \tau_k^2 \leq C$$

La norma en l^2 de B_k^2 queda:

$$\|B_k^2\|_{l^2} \leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \left(\int_0^\infty \|f_k(s)\|_{l^2}^2 s^{n-2} ds \right)^{1/2}$$

Observemos ahora que para una función $G(s)$ se tiene:

$$\left(\int_0^\infty G^2(s) s^{n-2} ds \right)^{1/2} \leq c \|G^2\|_{L^{\frac{n}{n-1},1}(r^{n-1} dr)}^{1/2} = c \|G\|_{L^{\frac{2n}{n-1},2}(r^{n-1} dr)}$$

Esta desigualdad se obtiene separando la potencia $s^{n-2} = s^{n-1} s^{-1}$. Por un lado, $r^{-1} \in L^{n,\infty}(r^{n-1} dr)$ y por otro, al ser n y $\frac{n}{n-1}$ exponentes conjugados, sabemos que $(L^{\frac{n}{n-1},1}(r^{n-1} dr))^* = L^{n,\infty}(r^{n-1} dr)$ luego efectivamente:

$$\left(\int G^2 s^{n-1} \frac{ds}{s} \right)^{1/2} \leq (\|G^2\|_{L^{\frac{n}{n-1},1}(r^{n-1} dr)} \|r^{-1}\|_{L^{n,\infty}(r^{n-1} dr)})^{1/2} \leq c \|G^2\|_{L^{\frac{n}{n-1},1}(r^{n-1} dr)}^{1/2}$$

Aplicaremos ésto a la acotación de $\{B_k\}_k$. Sabemos que $r^{-\frac{n-1}{2}} \in L^{\frac{2n}{n-1},\infty}(r^{n-1} dr)$, con lo que:

$$\|B_k^2\|_{L^{\frac{2n}{n-1},\infty}(r^{n-1} dr)} \leq c \|f_k\|_{l^2} \|r^{-\frac{n-1}{2}}\|_{L^{\frac{2n}{n-1},\infty}(r^{n-1} dr)} = c \|\{f_k\}_k\|_{L^{\frac{2n}{n-1},1}(r^{n-1} dr)}$$

Nos falta la acotación en el exponente $p_0 = \frac{2n}{n+1}$. Acotamos como hicimos antes $|\sigma_k(r)| \leq c$ y a continuación vamos a utilizar la desigualdad de Hölder :

$$\begin{aligned} B_k^2 &= \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \int_{Z_k} \frac{|f_k(s)\mu_k(s)|}{r+s} s^{\frac{n-1}{2}} ds \\ &\leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \left(\int_{Z_k} \frac{|f_k(s)|^\alpha}{|r+s|^\alpha} s^{\alpha \frac{n-1}{2}} ds \right)^{1/\alpha} \left(\int_{Z_k} |\mu_k(s)|^{\alpha'} ds \right)^{1/\alpha'} \end{aligned}$$

Para la segunda integral el Lema 1.5 nos da que si $\alpha' < 4$, es decir $\alpha > 4/3$:

$$\left(\int_{Z_k} |\tau_k(s)|^{\alpha'} ds \right)^{1/\alpha'} \leq C k^{-1/\alpha'}$$

La potencia k podemos meterla dentro de la primera de las integrales de la expresión de B_k^2 como s , puesto que estamos integrando en Z_k , quedando:

$$|B_k^2| \leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \left(\int_{Z_k} \frac{|f_k(s)|^\alpha}{|r+s|^\alpha} s^{\alpha \frac{n-1}{2}} s^{\alpha/\alpha'} ds \right)^{1/\alpha}$$

Expresemos las potencias de s como:

$$s^{\alpha \frac{n-1}{2}} s^{\alpha/\alpha'} = s^{\alpha \frac{n-1}{2} + \alpha - 1} = s^{\alpha \frac{n+1}{2}} s^{-1}$$

y así

$$|B_k^2| \leq \frac{c}{r^{\frac{n-1}{2}}} \left(\int_{Z_k} \frac{|f_k(s)|^\alpha}{|r+s|^\alpha} s^{\alpha \frac{n+1}{2}} \frac{ds}{s} \right)^{1/\alpha}$$

Acotando $1/(r+s)$ por $1/r$ queda

$$|B_k^2| \leq \frac{c}{r^{\frac{n+1}{2}}} \left(\int_{Z_k} |f_k(s)| s^{\frac{n+1}{2}} \frac{ds}{s} \right)^{1/\alpha}$$

Si $n > 2$ podemos tomar $\alpha = \frac{2n}{n+1}$, ya que de esta forma $\alpha > 4/3$ tal como necesitábamos, entonces $s^{\frac{n+1}{2}} s^{\alpha} s^{-1} = s^{n-1}$ y:

$$\begin{aligned} \|B_k^2\|_{l^2} &\leq \frac{c}{r^{\frac{n+1}{2}}} \left(\int_{Z_k} \|f_k(s)\|_{l^2}^{\frac{2n}{n+1}} s^{n-1} ds \right)^{\frac{n+1}{2n}} \\ &= \frac{c}{r^{\frac{n+1}{2}}} \|\{f_k\}_k\|_{L_{l^2}^{\frac{2n}{n+1}}(r^{n-1} dr)} \end{aligned}$$

Por último, al ser $r^{-\frac{n+1}{2}} \in L^{\frac{2n}{n+1}, \infty}(r^{n-1} dr)$:

$$\|B_k^2\|_{L_{l^2}^{\frac{2n}{n+1}, \infty}(r^{n-1} dr)} \leq c \|\{f_k\}_k\|_{L_{l^2}^{\frac{2n}{n+1}}(r^{n-1} dr)}$$

Caso $n = 2$, $p = 4/3$

Para concluir la prueba del Teorema 5.1 necesitaremos el siguiente resultado:

LEMA 5.3.

El operador

$$Qw(x) = \sup_a \frac{1}{|x-a|^{1/2}} \int_{|y-a| < |x-a|} \frac{w(y) dy}{|y-a|^{1/2}}$$

es de tipo débil restringido 2, es decir, lleva de forma acotada el espacio $L^{2,1}(\mathbf{R})$ en $L^{2,\infty}(\mathbf{R})$.

Dejaremos pendiente su prueba hasta finalizar la del Teorema 5.1.

Recordemos la descomposición:

$$P^1\{f_k\}_k = \{A_k\}_k + \{B_k\}_k$$

con $|B_k| \leq B_k^1 + B_k^2$. La estimación para $\{B_k^1\}_k$ ya la hemos demostrado incluso para $n = 2$.

Ocupémonos de $\{B_k^2\}_k$, que para $n = 2$ tiene la expresión:

$$B_k^2 = \frac{c}{r^{1/2}} \int_{Z_k} \frac{|f_k(s)\mu_k(s)|}{r+s} s^{1/2} ds$$

Sacamos de la integral el denominador como r , así mayoramos B_k^2 por:

$$\begin{aligned} B_k^2 &\leq \frac{c}{r^{3/2}} \int_{Z_k} |f_k(s)\mu_k(s)| s^{1/2} ds \\ &= \frac{c}{r^{3/2}} \int_{Z_k} |f_k(s)| \frac{|\mu_k(s)|}{s^{1/2}} s ds \\ &\leq \frac{c}{r^{3/2}} \int_{Z_k} |f_k(s)\mu_k(s)| k^{-1/2} s ds \end{aligned}$$

Sustituímos μ_k por τ_k y observamos que la función $k^{-2/p} \tau_k \chi_{(k/2, 3k/2)}$ no solamente está en $L^p(rdr)$ cuando $p < 4$ uniformemente en k , sino que además en el extremo $p = 4$ cumple:

$$\|k^{-1/2} \tau_k \chi_{(k/2, 3k/2)}\|_{L^{4,\infty}(rdr)} \leq C$$

Esto nos permite utilizar la dualidad de los espacios $L^{4,\infty}$ y $L^{4/3,1}$, acotando

$$|B_k^2| \leq \frac{C}{r^{3/2}} \|f_k\|_{L^{4/3,1}(rdr)}$$

y entonces:

$$\|\{B_k^2 f_k\}_k\|_{l^2} \leq \frac{C}{r^{3/2}} \|\{f_k\}_k\|_{l^2} \| \cdot \|_{L^{4/3,1}(rdr)}$$

Sabemos que $r^{-3/2} \in L^{4/3,\infty}(rdr)$, por tanto:

$$\|\{B_k^2 f_k\}_k\|_{L^{4/3,\infty}(rdr)} \leq C \|\{f_k\}_k\|_{L^{4/3,1}(rdr)}$$

El resto de la prueba trata de la acotación de $\{A_k\}_k$. Hemos de probar que:

$$\|(\sum_k |A_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4/3,\infty}(rdr)} \leq C \|(\sum_k |f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4/3,1}(rdr)}$$

Por el carácter local de los términos de A_k y de la propia demostración de la acotación (fuerte) del caso $n > 2$ vemos que es suficiente demostrar el siguiente lema

LEMA 5.4.

$$\|(\sum_k |L_k^1 f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4/3,\infty}(dr)} \leq C \|(\sum_k |f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4/3,1}(dr)}$$

Esta es la extensión a los extremos que anunciamos en el capítulo III del resultado del Corolario 3.8.

PRUEBA:

En lugar de probar esta desigualdad vamos a probar la dual, es decir:

$$\|(\sum_k |L_k^2 f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4,\infty}(dr)} \leq C \|(\sum_k |f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4,1}(dr)}$$

donde recordamos que:

$$L_k^2 f_k(r) = \mu_k(r) H(\sigma_k(s) f_k(s))(r)$$

y suponemos como en el resto de la demostración del Teorema 5.1 que las funciones f_k tienen soporte en $(0, \infty)$.

Estimamos según el Capítulo I:

$$|\sigma_k(s)| \leq c(\eta_k(s) + k^{-1/6})$$

definiendo $\eta_k(s) = |(s - k)/(s + k)|^{1/4}$, y recordamos que $k^{-1/6} \|\mu_k\|_\infty \leq C$. Entonces:

$$|\mu_k(r) H(\sigma_k(s) f_k(s))(r)| \leq C |H(\tilde{f}_k)(r)| + |\mu_k(r) H(\tilde{f}_k(s) \eta_k(s))(r)|$$

con $\tilde{f}_k = f_k \sigma_k / (\eta_k + k^{-1/6})$.

El primero de los términos que hemos obtenido no necesita más estimaciones. Para el segundo acotamos:

$$|\mu_k(r)| \leq c \tau_k(r) = c \min(k^{1/6}, |\frac{k+r}{k-r}|^{1/4}) \leq c(|\frac{k}{r-k}|^{1/4} + 1)$$

resultando

$$\begin{aligned} |\mu_k(r) H(\eta_k(s) \tilde{f}_k(s))(r)| &\leq C |H(\eta_k(s) \tilde{f}_k(s))(r)| \\ &\quad + |H(\eta_k(s) \tilde{f}_k(s))(r) (\frac{k}{r-k})^{1/4}| \end{aligned}$$

En el primer sumando no necesitamos ya más que $|\eta_k(s)| \leq 1$ y que $|\tilde{f}_k| \leq |f_k|$. Para el segundo utilizamos que:

$$|\eta_k(r)| \leq \left| \frac{r-k}{k} \right|^{1/4}$$

llamemos ν_k a esa función: $\nu_k(r) = |(r-k)/k|^{1/4}$. Podemos escribir lo que nos queda por acotar de la forma:

$$\begin{aligned} H(\tilde{f}_k(s)\nu_k(s))(r)\nu_k^{-1}(r) &= H(\tilde{f}_k)(r) \\ &+ H(\tilde{f}_k(s)(\nu_k(s) - \nu_k(r)))(r)\nu_k^{-1}(r) \end{aligned}$$

donde $\tilde{f}_k = \tilde{f}_k(\eta_k/\nu_k)$.

Otra vez es sólo el segundo término el que nos da trabajo puesto que de nuevo $|\tilde{f}_k| \leq |f_k|$. Para simplificar la notación escribiremos f_k en vez de \tilde{f}_k en lo que queda de demostración. Acotamos pues el segundo término en valor absoluto por:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty |f_k(s)| \frac{|s-k|^{1/4} - |r-k|^{1/4}}{r-s} ds \frac{1}{|r-k|^{1/4}} \\ &\leq \frac{C}{|r-k|^{1/4}} \int_0^\infty |f_k(s)| \frac{ds}{|s-k|^{3/4} + |r-k|^{3/4}} \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $|a|^{1/4} - |b|^{1/4}| \leq |a-b||a|^{3/4} + |b|^{3/4}|^{-1}$.

Mayoramos ahora esa última expresión separando la integral en dos partes y acotando el denominador, obteniendo las integrales:

$$\leq \frac{1}{|r-k|} \int_{|s-k| < |r-k|} |f_k(s)| ds + \frac{1}{|r-k|^{1/4}} \int_{|r-k| < |s-k|} \frac{|f_k(s)| ds}{|s-k|^{3/4}}$$

Al primero de estos términos podemos mayorarlo por la función maximal de Hardy-Littlewood, que cumple la desigualdad vectorial que necesitamos.

Así pues, lo único que queda por probar es la acotación vectorial para el segundo de esos últimos términos. Llamemos $R_k f_k$ a dicho término.

Podemos encontrar una función positiva $w \in L^{2,1}$ con norma unidad tal que

$$\|(\sum_k |R_k f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4,\infty}(dr)}^2 = \|\sum_k |R_k f_k|^2\|_{L^{2,\infty}(dr)} = \sum_k \int |R_k f_k|^2 w$$

La siguiente igualdad de integrales

$$(\int_{|s|>|r|} F(s) ds)^2 = 2 \int_{|s|>|r|} F(s) (\int_{|t|>|s|} F(t) dt) ds$$

nos permite escribir cada sumando como

$$\begin{aligned} \int |R_k f_k|^2 w(r) dr &= \int \frac{w(r)}{|r-k|^{1/2}} \left| \int_{|r-k|<|s-k|} \frac{|f_k(s)| ds}{|s-k|^{3/4}} \right|^2 dx \\ &= 2 \int \frac{w(r)}{|r-k|^{1/2}} \int_{|r-k|<|s-k|} \frac{|f_k(s)|}{|s-k|^{3/4}} \int_{|s-k|<|t-k|} \frac{|f_k(t)| dt}{|t-k|^{3/4}} ds dr \end{aligned}$$

Aplicando Fubini reordenamos

$$\begin{aligned} &= 2 \int |f_k(s)| \frac{1}{|s-k|^{1/4}} \int_{|s-k|<|t-k|} \frac{|f_k(t)| dt}{|t-k|^{3/4}} \frac{1}{|s-k|^{1/2}} \int_{|r-k|<|s-k|} \frac{w(r) dr}{|r-k|^{1/2}} ds \\ &\leq 2 \int |f_k(s)| |R_k f_k(s)| Qw(s) ds \end{aligned}$$

donde hemos llamado:

$$Qw(r) = \sup_a \frac{1}{|r-a|^{1/2}} \int_{|y-a|<|r-a|} \frac{w(y) dy}{|y-a|^{1/2}}$$

Este es el operador que el Lema 5.3 asegura es de tipo débil restringido 2, es decir, está acotado entre los espacios $L^{2,1}(\mathbf{R})$ y $L^{2,\infty}(\mathbf{R})$.

La estimación que hemos obtenido junto con la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos dan:

$$\begin{aligned} \|\{R_k f_k\}_k\|_{L_{l_2}^{4,\infty}}^2 &\leq 2 \sum_k \int |f_k(s)| |R_k f_k(s)| Qw(s) ds \\ &\leq 2 \int (\sum_k |f_k|^2)^{1/2} (\sum_k |R_k f_k|^2)^{1/2} Qw(s) ds \end{aligned}$$

Por último, utilizando la acotación del operador Q y la dualidad llegamos a

$$\begin{aligned} \|\{R_k f_k\}_k\|_{L_{l_2}^{4,\infty}}^2 &\leq 2 \|(\sum_k |f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4,1}} \|(\sum_k |R_k f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4,\infty}} \|Qw(s)\|_{L^{2,\infty}} \\ &\leq C \|(\sum_k |f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4,1}} \|(\sum_k |R_k f_k|^2)^{1/2}\|_{L^{4,\infty}} \\ &= C \|\{f_k\}_k\|_{L_{l_2}^{4,1}} \|\{R_k f_k\}_k\|_{L_{l_2}^{4,\infty}} \end{aligned}$$

Esto termina la prueba del Lema 5.4 y por lo tanto la del Teorema 5.1. ■

Nos queda la prueba del Lema 5.3.

PRUEBA (LEMA 5.3):

Basta considerar la acción del operador Q sobre funciones características de conjuntos medibles: $w = \chi_E$. Observando que $|y - a|^{-1/2} \in L^{2,\infty}$ uniformemente en a podemos acotar

$$\int_{|y-a| < |r-a|} \chi_E(y) \frac{dy}{|y-a|^{1/2}} \leq \left(\int_{|y-a| < |r-a|} \chi_E(y) dy \right)^{1/2} \left\| \frac{1}{|y-a|^{1/2}} \right\|_{L^{2,\infty}}$$

Entonces, Q está relacionado con la función maximal de Hardy-Littlewood mediante:

$$Qw(r) \leq C \sup_a \left(\frac{1}{|r-a|} \int_{|y-a| < |r-a|} \chi_E(y) dy \right)^{1/2} \leq C (M\chi_E(r))^{1/2}$$

con lo cual:

$$\|Qw\|_{L^{2,\infty}} \leq C \|M\chi_E\|_{L^{1,\infty}}^{1/2} \leq C |E|^{1/2} = C \|w\|_{L^{2,1}}$$

■

Observación:

Las mismas técnicas expuestas en el Teorema 5.1 junto con las estimaciones vectoriales del capítulo IV nos darían el siguiente resultado:

TEOREMA 5.5.

Con la notación anterior, el operador T está acotado entre los espacios $L_{l_i}^{p_i,1}(r^{n-1}dr)$ y $L_{l_i}^{p_i,\infty}(r^{n-1}dr)$ para $i = 0, 1$ y $p_0 < q < p_1$.

Este resultado no tiene interpretación como acotación del multiplicador del disco en los espacios de norma mixta pero una vez más es suficiente, por interpolación, para obtener el Teorema 4.2.

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRAFIA

- [A]. K. ANDERSEN, *Weighted Inequalities for the Disc Multiplier*, Proc. Amer. Math. Soc. **83** n.2 (1981), 269–275.
- [B]. J. A. BARCELO, *Funciones de Banda Limitada*, Tesis Doctoral. Universidad Autónoma de Madrid (1988).
- [BC1]. J. A. BARCELO y A. CORDOBA, *Band-Limited Functions: L^p -convergence*, Bull. Amer. Math. Soc. **18**, n.2 (1988), 163–166.
- [BC2]. J. A. BARCELO y A. CORDOBA, *Band-Limited Functions: L^p -convergence*, Trans. Amer. Math. Soc. **313**, n.2 (1989), 655–669.
- [CHS]. A. CARBERY, E. HERNANDEZ y F. SORIA, *Estimates for the Kakeya Maximal Operator on Radial Functions in \mathbb{R}^n* , Proceedings ICM-90 Satellite Conference on Harmonic Analysis, Sendai 1990.
- [CRS]. A. CARBERY, E. ROMERA y F. SORIA, *Radial Weights and Mixed Norm Inequalities for the Disc Multiplier*, Preprint.
- [CSo]. A. CARBERY y F. SORIA, *Almost everywhere convergence of Fourier integrals for functions in Sobolev spaces, and an L^2 -localisation principle*, Rev. Mat. Iberoamericana **4** n.2 (1988).
- [Ca]. L. CARLESON, *On convergence and growth of partial sums of Fourier Series*, Acta Math. **116** (1966), 135–157.
- [CS]. L. CARLESSON y P. SJÖLIN, *Oscillatory Integrals and a Multiplier Problem for the Disc*, Studia Math. **44** (1972), 287–299.
- [Ch]. S. CHANILLO, *The Multiplier for the Ball and Radial Functions*, Jour. Func. Anal. **55** (1984), 18–24.

- [CF]. R. COIFMAN y C. FEFFERMAN, *Weighted Norm Inequalities for Maximal Functions and Singular Integrals*, Studia Math. **51** (1974), 241–250.
- [Co]. L. COLZANI, *Convergence of Expansions in Legendre Polynomials*, Preprint.
- [C1]. A. CORDOBA, *The Muckenhoupt Maximal Function and the Spherical Summation Multiplier*, Amer. J. Math **99** (1977), 1–22.
- [C2]. A. CORDOBA, *The Disk Multiplier*, Duke Math. Jour. **58** n.1 (1989), 21–27.
- [CoF]. A. CORDOBA y C. FEFFERMAN, *A weighted norm inequality for singular integrals*, Studia Math. **57** (1976), 97–101.
- [E]. A. ERDELYI, “Asymptotic Expansions,” Dover, 1956.
- [F1]. C. FEFFERMAN, *The Multiplier for the Ball*, Ann. of Math. **94** (1971), 330–336.
- [F2]. C. FEFFERMAN, *A Note on the Spherical Summation Multiplier*, Israel J. Math. **15** (1973), 44–52.
- [FS]. C. FEFFERMAN y E. STEIN, *Some maximal inequalities*, Amer. J. Math. **93** (1971), 107–115.
- [GR]. J. GARCIA-CUERVA y J. L. RUBIO DE FRANCIA, “Weighted Norm Inequalities and Related Topics,” North-Holland, Amsterdam, 1985.
- [dG1]. M. DE GUZMAN, “Differentiation of Integrals in \mathbf{R}^n ,” Lecture Notes in Math. **481** (Springer-Verlag, Berlin), 1975.
- [dG2]. M. DE GUZMAN, “Real Variable Methods in Fourier Analysis,” North-Holland, Amsterdam, 1981.
- [H]. C. HERZ, *On the Mean Inversion of Fourier and Hankel Transforms*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **40** (1954), 996–999.
- [Hi]. I. HIRSCHMAN Jr., *Multiplier Transformations II*, Duke Math. Jour. **28** (1961), 45–56.
- [Ho]. S. HOFMANN, *Singular Integrals with Power Weights*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** n.2 (Octubre 1990), 343–353.

- [Hu]. R. A. HUNT, *On the convergence of Fourier series*, Proc. Conf. Orthogonal Expansions and Continuous Analogues. Southern Ill. Univ. Press (1968), 235–255.
- [HY]. R.A. HUNT y W.S. YOUNG, *A weighted norm inequality for Fourier Series*, Bull. Amer. Math. Soc. 80 (1974), 274–277.
- [K]. Y. KANJIN, *Convergence and Divergence Almost Everywhere of Spherical Means for Radial Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 n.4 (1988), 1063–1069.
- [KT]. C. KENIG y P. TOMAS, *The Weak Behaviour of Spherical Means*, Proc. Amer. Math. Soc. 78 (1980), 48–50.
- [MOT]. F. J. MARTIN-REYES, P. ORTEGA y A. DE LA TORRE, *Weighted Inequalities for One-sided Maximal Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 319, n. 2 (1990), 517–534.
- [Me]. T. MENARGUEZ, *Técnicas de Discretización en Análisis Armónico para el Estudio de Acotaciones Débiles de Operadores Maximales e Integrales Singulares*, Tesis Doctoral. Universidad Complutense de Madrid (1990).
- [Mo]. G. MOCKENHAUPT, *On Radial Weights for the Spherical Summation Operator*, J. Funct. Anal. 91 (1990), 174–181.
- [Mu]. B. MUCKENHOUPT, *Weighted norm inequalities for the Hardy Maximal Function*, Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207–226.
- [P]. E. PRESTINI, *Almost Everywhere Convergence of the Spherical Partial Sums for Radial Functions*, Monatshefte für Mathematik Springer Verlag (1988), 207–216.
- [RS]. E. ROMERA y F. SORIA, *Endpoint Estimates for the Maximal Operator Associated to Spherical Partial Sums on Radial Functions*, Proc. Amer. Math. Soc. (1991).
- [R]. J. L. RUBIO DE FRANCIA, *Transference Principles for Radial Multipliers*, Duke Math. J. 58 (1989), 1–19.
- [Sy]. E. SAWYER, *Weighted Inequalities for the One-sided Hardy-Littlewood Maximal Functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 233 (1977), 179–196.

- [S1]. E. STEIN, "Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions," Princeton Univ. Press, 1970.
- [S2]. E. STEIN, *Some Problems in Harmonic Analysis*, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc. Providence **35**, I (1979).
- [S3]. E. STEIN, *Note on singular integrals*, Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 250-254..
- [SW]. E. STEIN y G. WEISS, "Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces," Princeton Univ. Press, 1971.
- [W]. G. N. WATSON, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions," Cambridge Univ. Press, 1966.
- [Wi]. N. WIENER, "The Fourier Integral and certain of its applications," Cambridge Univ. Press, 1988.
- [Z]. A. ZYGMUND, "Trigonometric Series," Cambridge Univ. Press, 1988.

... de la ...
... fecha ...
Doctoral con ... APTO CON ... DE
Madrid, 15 NOVIEMBRE 1994

Alcalá

Juan de los Rios

Juan de los Rios

Juan de los Rios

Josef. Guadalupe